Faculty of Mechanical Engineering

ELÕADÁSVÁZLATOK

Az elõadásvázlatok Word for Windows 2.0 vagy HTML formátumban vannak.

Tantárgyismertetô bevezetô:

- A mechanika tárgya, felosztása, vizsgálati módszere
- Alapfogalmak, mértékegységek
- Erõk összevonása, ill. felbontása összetevõkre

A statika alaptételei:

- A statika alaptételei:
- Az erô statikai nyomatéka:
  - Fogalma, fajtái, az elõjelszabály
  - A nyomatéki tétel

A kényszerek fogalma, fajtái .

- A kényszerek fogalma, fajtái
- Közös metszéspontú erõk egyensúlya:
- Két erô egyensúlya
- Három erô egyensúlya

Négy erô egyensúlyának vizsgálata:

- Szerkesztéssel
- Számítással

- Az erõpár:

  - Fogalma és jellemzõi
  - Erõpárok összegzése
  - Közös síkú erô és erõpár eredõje

- Általános síkbeli és térbeli erõrendszerek:

  - Eredõje ill. redukálása
  - Egyensúlya

- Síkbeli erõrendszer eredõjének meghatározása szerkesztéssel:

  - közvetlen úton
  - kötélsokszög útján.

- A súlypont meghatározása:

  - A súlypont fogalma
  - Helyvektorának meghatározása
  - Vonalak, síkidomok, homogén testek súlypontjának kiszámítása

---

- A súrlódás jelenségének vizsgálata

  - Alapfogalmak, összefüggések
  - A súrlódás kúpjának megszerkesztése Gördülõellenállás.
  - Kötélsúrlódás.

- Igénybevétel, igénybevételi ábrák:

  - Az igénybevétel fogalma, fajtái
  - A legegyszerûbb tartótípusok
  - Az igénybevételi ábra fogalma. Az elõjelszabály
  - Összefüggés a terhelés és az igénybevételek között
  - Igénybevételi ábrák rajzolása

---

1. A mechanika tárgya

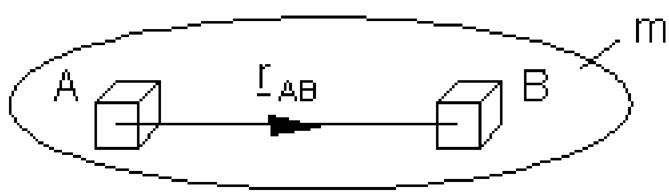
A mûszaki életben fontos a mozgásjelenségek megfigyelése, leírása, a mozgást kiváltó oknak a meghatározása, ill. a mozgásoknak a mûszaki feladat szerint megszabott biztosítása. Mindezek módszereit és törvényeit tárgyalja a mechanika.

Röviden: a mechanika az anyagi testek mozgásával és erõkkel foglalkozó tudomány.

2. Alapfogalmak

Az anyagi test fogalma

A mechanikában vizsgált testek a geometriában vizsgált testektõl abban különböznek, hogy mindig anyagi testek. a test anyagiságát a tömeg (sûrûség) fejezi ki. Az anyagi testet kontinuumnak tekintjük, ami azt jelenti, hogy az anyag a test alakja által kijelölt teret folytonosan tölti ki. A legegyszerûbb az az anyagi test, amelynek alakja a mozgás során nem változik. Az ilyen testet merev testnek nevezzük. Merev test esetén a test bármely két pontjának a távolsága állandó: AB=áll.



1. ábra

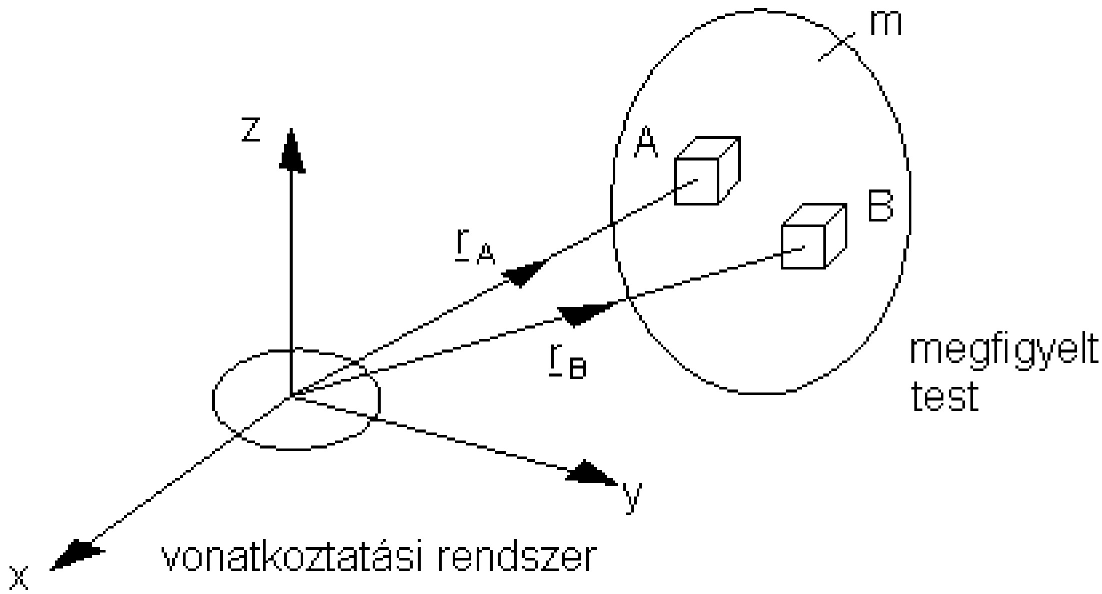
Vektorosan felírva a merev test kritériumát:

$$\underline{r}_{AB} \cdot \underline{r}_{AB} = |\underline{r}_{AB}| \cdot |\underline{r}_{AB}| \cdot \cos 0^\circ = |\underline{r}_{AB}|^2$$

$$|\underline{r}_{AB}| = \text{áll.}$$

A mozgás fogalma

Az anyagi test mozgásán annak egy merev testhez rögzített koordináta-rendszerhez, egy ún. vonatkoztatási rendszerhez viszonyított helyzetváltoztatását értjük.



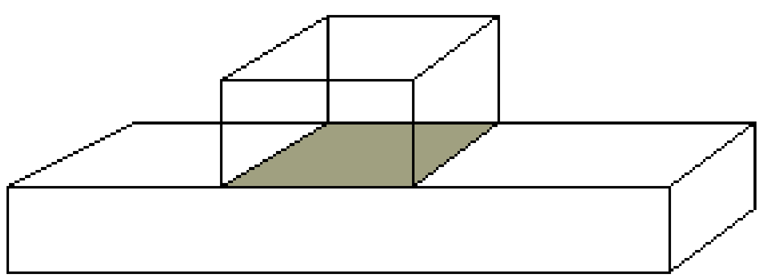
2. ábra

Az erõ fogalma

Erõnek nevezzük két test egymásra gyakorolt hatását, ha annak következtében a testben mozgásállapot-változás vagy alakváltozás következik be. Jele:F, mértékegysége N (kN, MN, GN). Két test egymásra gyakorolt hatása létrejöhet közvetlen érintkezéssel vagy érintkezés nélkül.

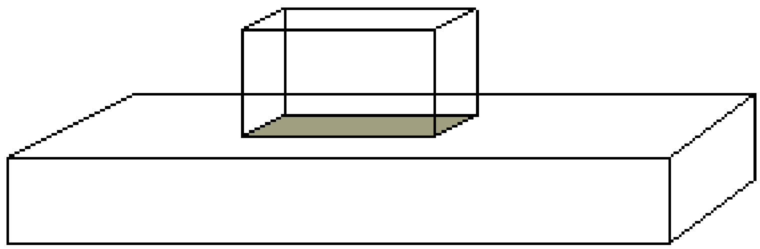
Közvetlen érintkezés esetén felszíni erõkrõl beszélünk. Az érintkezés történhet:

egy felület mentén => felület mentén megoszló erõrendszer (p [N/m])



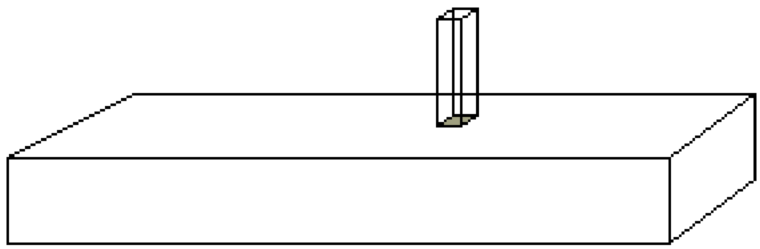
3. ábra

egy él mentén => él mentén megoszló erõrendszer (p [N/m]).



4. ábra

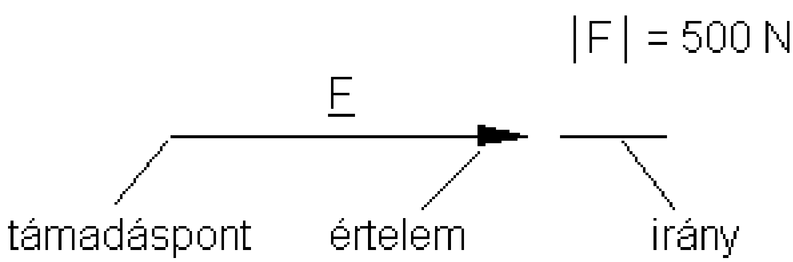
egy pont mentén => koncentrált erõ



5. ábra

Ha a két test egymásra gyakorolt hatása közvetlen érintkezés nélkül jön létre, akkor tömegerõrõl vagy térfogati erõrõl beszélünk.

Az erõt három adat jellemzi: nagyság, irány és értelem, azaz az erõ vektormennyiség:



6. ábra

Egy testre egyidejûleg több erõ is hathat. Az egyugyanazon testre ható erõk összességét erõrendszernek nevezzük.

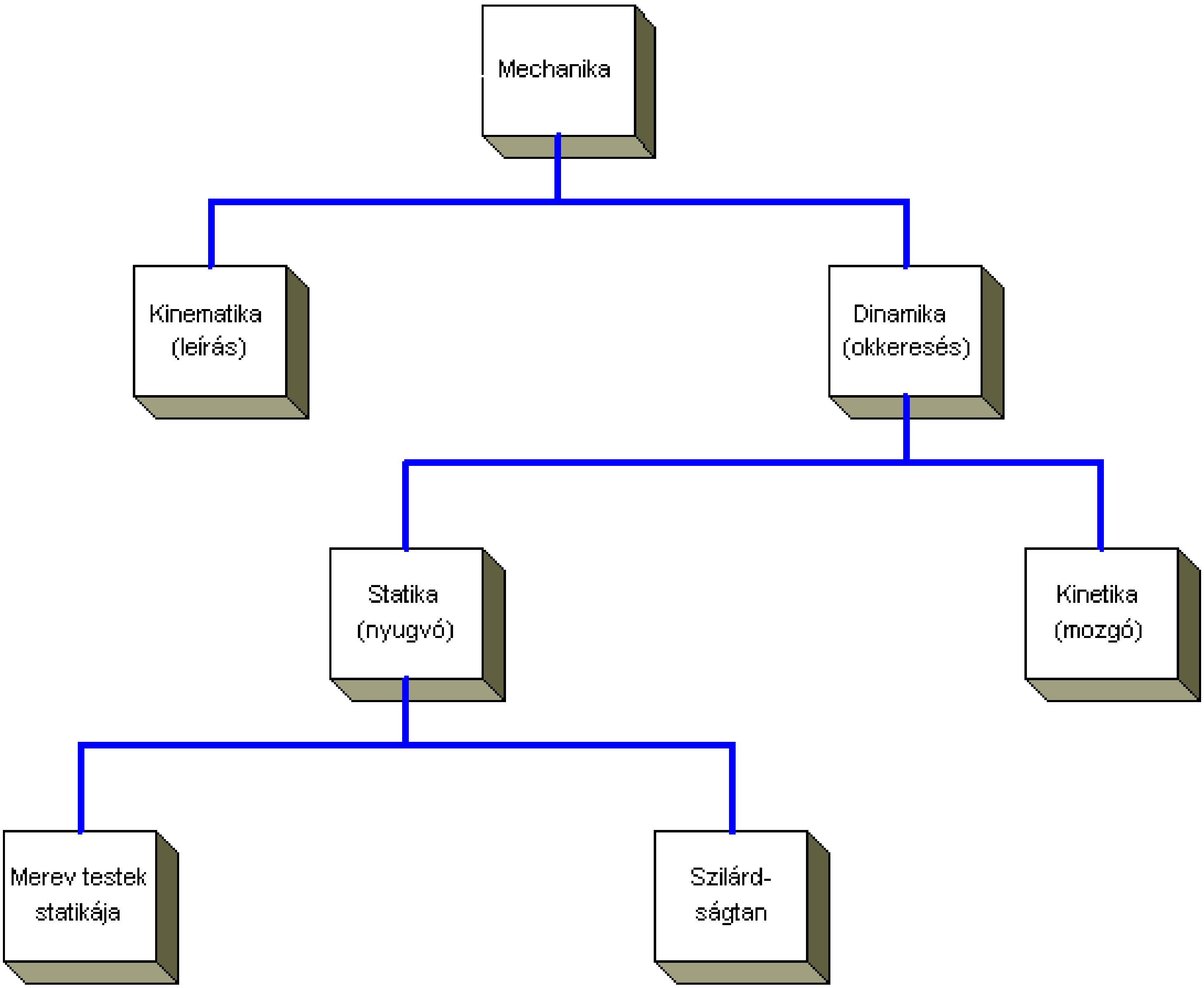
3. A mechanika vizsgálati módszere

Merev testek, él mentén megoszló erõrendszerek, koncentrált erõk a valóságban nem léteznek, csak jól megközelítik azt. Mindezek modellek. A mechanika vizsgálati módszere a mechanikai modell alkotása. Ez úgy történik, hogy a valóság teljes bonyolultsága helyett a vizsgálandó testnek csak a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait tartjuk meg, a többit elhanyagoljuk. ez a mechanikai modell.

Ugyanazon testnek más és más modell felel meg, ha különbözõ jelenségeket vizsgálunk.

4. A mechanika felosztása

A mechanika két fõ részre oszlik: a kinematikára és a dinamikára. A kinematika a mozgás leírásával, a dinamika a mozgás megmagyarázásával foglalkozik. A dinamika további két részre bontható: a kinetikára és a statikára. A kinetika a mozgást kiváltó okokat kutatja. A statika a mozgás egy különleges esetének, a nyugalomnak a vizsgálatával, feltételeinek elemzésével foglalkozik.



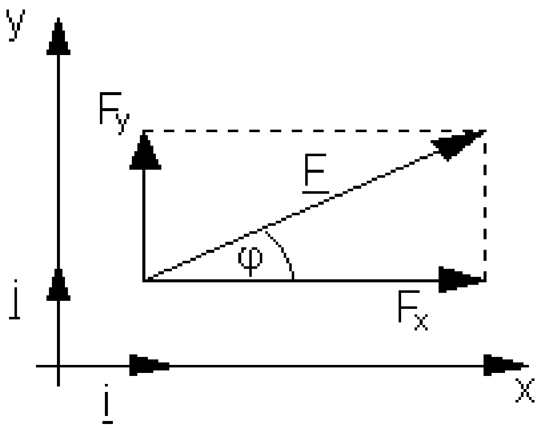
7. ábra

5. Erõk összevonása ill. felbontása összetevõkre

- két, az erõvel közös síkban fekvõ (nem párhuzamos) hatásvonal irányába.

- három, nem egy közös síkban fekvõ hatásvonal irányába.

Az erõ síkbeli felbontása



$$F_x = F \cos \varphi$$
$$F_y = F \sin \varphi$$

8. ábra

a 8. ábra alapján az F erõ skalár komponensei az x és az y tengely irányában.

Az erõ felírása: F = Fx $\underline{i}$ + Fy $\underline{j}$ vagy oszlopvektor formájában (mátrix):

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

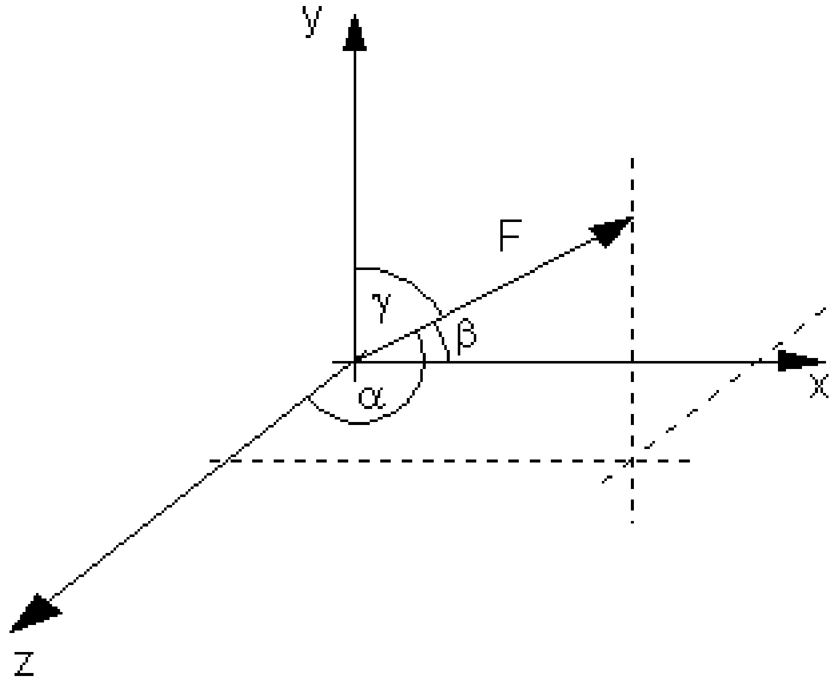
A komponensek elõállíthatók a matematikában tanultak szerint is: Fx = $\underline{F}$ $\underline{i}$ és Fy = $\underline{F}$ $\underline{j}$

Az erõ nagysága:

$$|\underline{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Szokás skalár komponensekrõl (Fx ,Fy) és ún. vektorkomponensekrõl is beszélni. $\underline{Fx}$ = Fx $\underline{i}$ és $\underline{Fy}$ = Fy $\underline{j}$.

Az erõ térbeli felbontása



9. ábra

A síkbeli felbontáshoz hasonlóan $\underline{F}$ = Fx $\underline{i}$ + Fy $\underline{j}$ + Fz $\underline{k}$.

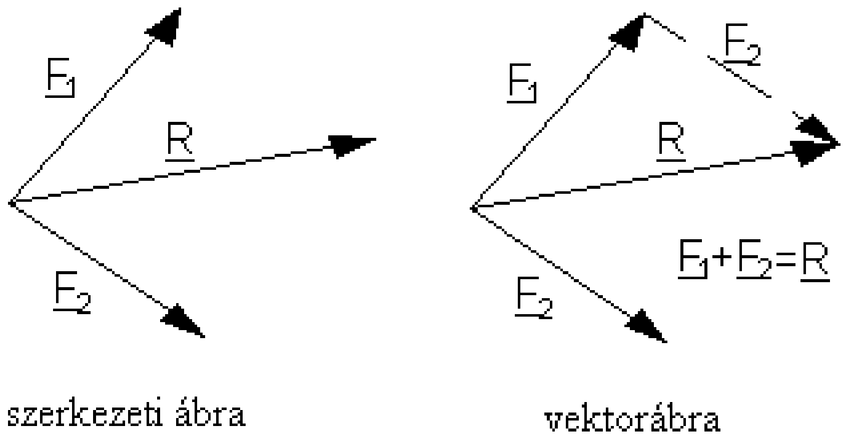
Térben is írható: F = F cosa , F = F cosb , F = F cosg , ahol a,b és g az F vektor hatásvonalának (irányának) az x, y és z tengelyekkel bezárt szögei. Számításuk:

cos alfa = Fx / F; cos beta = Fy / F; cos gamma = Fz / F ahol

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

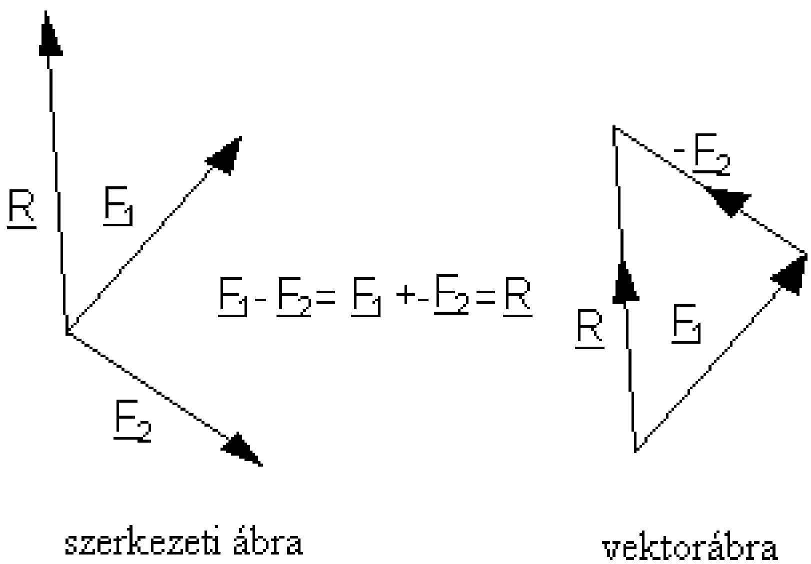
a vektor abszolútértéke.

Erõk összeadása szerkesztéssel:



10. ábra

Erõk kivonása szerkesztéssel:



11. ábra

1.2. A statika alaptételei:

Az erõ statikai nyomatéka:

1. Fogalma, fajtái, az elõjelszabály

2. A nyomatéki tétel

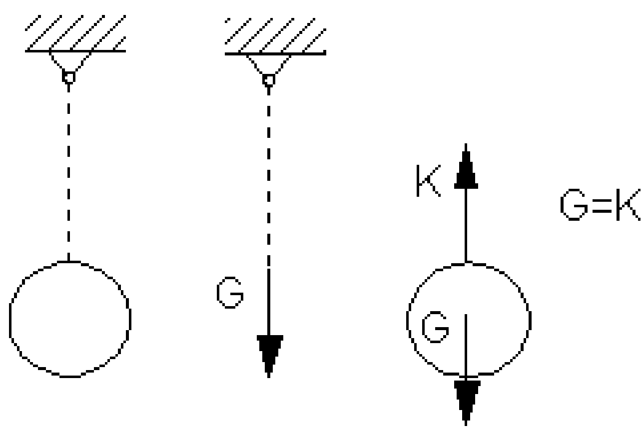
1. A statika alaptételei

A mechanika-hasonlóan a többi természettudományhoz-alaptételeit megfigyelések és tapasztalatok alapján állította fel. Ezen megfigyelések és tapasztalások vizsgálata olyan egyszerû tételekhez vezetett, amelyek tovább már nem elemezhetõk. Az így kapott könnyen érthetõ és meggyõzõ tapasztalati törvények az alaptételek, amelyeket bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el.

1. alaptétel

Newton III. axiómája, az akció-reakció elve, amely kimondja, hogy két testnek egymásra gyakorolt hatása mindig egyenlõ egymással, de ellentétes értelmû.

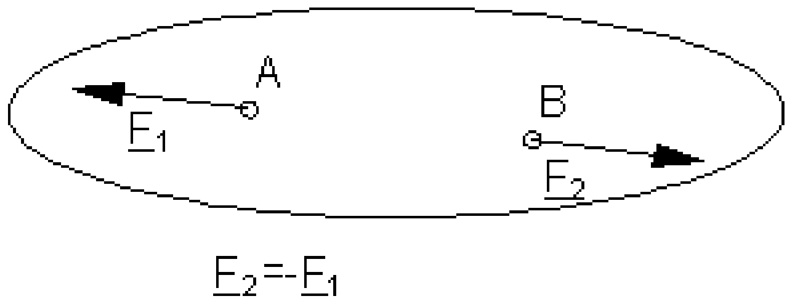
Pl.:



12. ábra

2. alaptétel

A testre ható két erõ akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a két erõ hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentett.



13. ábra

3. alaptétel

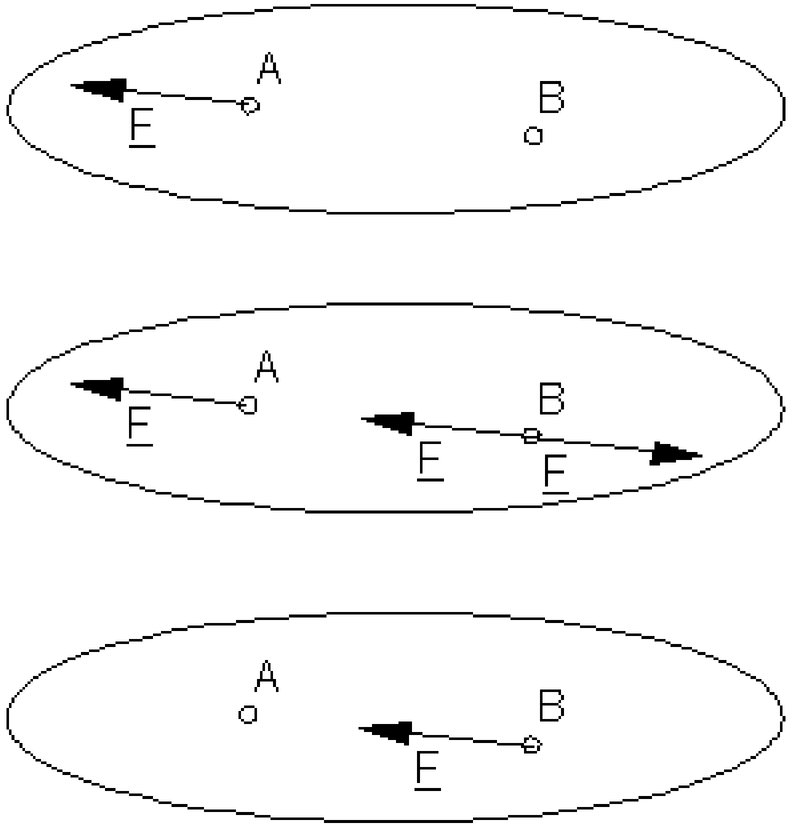
Közös támadáspontú erõrendszer mindig helyettesíthetõ egy vele egyenértékû egyetlen erõvel, az eredõvel. Az eredõ erõ:

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \sum \underline{F}_i$$

támadáspontja megegyezik a közös támadásponttal.

4. alaptétel

Csak merev testre igaz. Merev testen támadó erõrendszer hatása nem változik, ha hozzáadunk vagy elveszünk belõle egy másik, önmagában egyensúlyban lévõ erõrendszert.

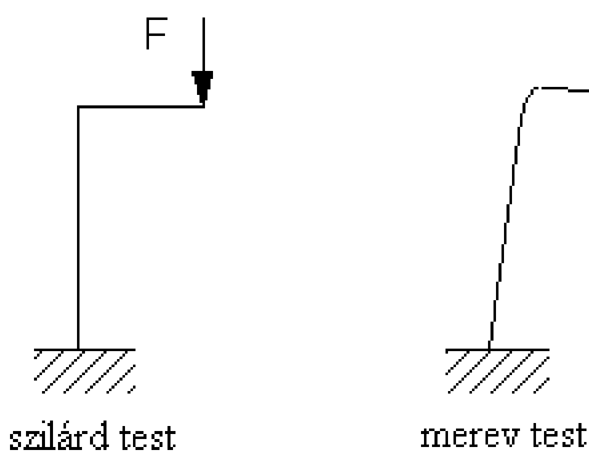


14. ábra

A tétel következménye: merev testen támadó erõk hatásvonaluk mentén eltolhatók, azaz a támadáspontnak nincs jelentõsége.

5. alaptétel

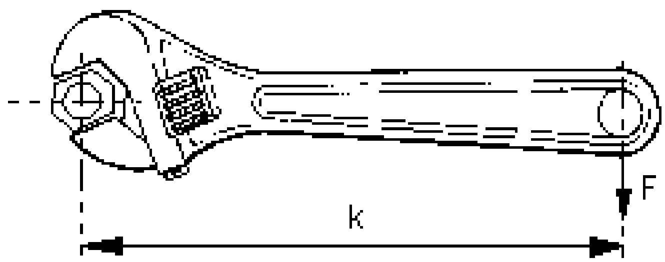
Kapcsolatot teremt a statika és a szilárdságtan között. Kimondja, hogy ha bármilyen szilárd test a ráható külsõ erõk hatására alakváltozást szenved majd ismét nyugalomba kerül, akkor ebben a deformált állapotában helyettesíthetõ egy vele egyezõ alakú merev testtel.



15. ábra

2. Az erõ statikai nyomatéka

Amikor két,egymáshoz csavarkötéssel rögzített lemeznél a csavaranyát villáskulccsal meghúzzuk, a villáskulcsra ható F erõ forgató hatást vált ki. Ennek a forgatóhatásnak a mértéke egyenesen arányos az erõ nagyságával, és az erõ hatásvonalának a forgásponttól mért távolságával.



16. ábra

Vizsgáljuk meg mindezt általánosan. Legyen adott egy O pont körül elforgatható lemez. Mûködtessünk rajta egy F erõt. A lemez az erõ hatására elfordul.

Általánosan kimondhatjuk: az elfordulás síkja az erõvektor és a pont által meghatározott sík, az elfordulás tengelye pedig az O ponton átmenõ, a síkra merõleges t-t tengely.

Tehát az erõ forgató hatással rendelkezik. Az erõ forgató hatását a statikai nyomaték méri. Ennek mértékéül az $M = F \cdot k$ szorzatot vezetjük be, ahol:

M: az F erõ t tengelyre vett statikai nyomatéka

k: az erõ karja (a t tengely és az erõ hatásvonala közötti normáltranzverzális)

Az erõ statikai nyomatékának mértékegysége: Nm.

Alkalmazott elõjelszabály: az a nyomaték pozitív, amely felülrõl nézve az óramutató járásával ellenkezõ értelemben forgat. (A jobbmenetû csavarnál a rögzítés negatív, az oldás pozitív forgatónyomatékkal történik.)

A statikai nyomatékot nemcsak tengelyre, hanem pontra is számíthatjuk. A t tengely O pontjára számított nyomatékvektor:

$$M= r \times F.$$

Az M vektor az r és F vektorok síkjára merõleges úgy, hogy r, F és M jobb sodrású koordinátarendszert alkot. A nyomaték nagysága: |M| = |F| |r| sinf = F · k . A vektorszámítás az erõ nyomatékának forgatóértelmét egyértelmûen meghatározza.

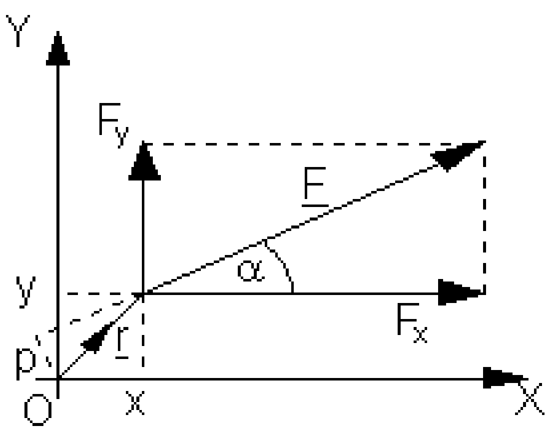
A tengelyre és a pontra vett statikai nyomatékok között kapcsolat áll fenn, miszerint: a t tengelyre vett nyomaték az O pontra vett nyomatékvektornak a t tengelyre esõ vetülete. A pontra vett nyomaték zérus, ha az erõ hatásvonala átmegy a ponton. A tengelyre vett nyomaték zérus, ha az erõ hatásvonala metszi a tengelyt, vagy párhuzamos a tengellyel.

Nyomatéki tétel:

Az erõ valamely pontra számított nyomatéka egyenlõ a komponensek ugyanezen pontra vett nyomatékának összegével.

Másképpen: egy erõrendszer eredõjének nyomatéka a sík bármely pontjára ugyanakkora, mint az erõk ugyanazon pontra vett nyomatékainak összege.

Az O pontra vett nyomatékvektor:



$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = $$

$$= (x \cdot F_y - y \cdot F_x)\,\underline{k}$$

17. ábra

De: a komponensekkel M = Fy · x - Fx · y = p F $\underline{k}$.

Így: p F = x · F - y · F , tehát a nyomatéki tétel igaz.

Közös ponton átmenõ erõrendszer esetén a nyomatéki tétel: az erõk nyomatékának algebrai összege bármely pontra zérus.

l.3. A kényszerek fogalma, fajtái

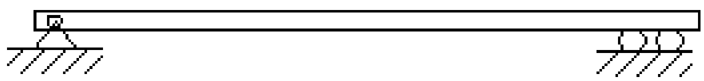
Közös metszéspontú erõk egyensúlya:

l. Két erõ egyensúlya

2. Három erõ egyensúlya

l. A kényszerek

A testek mozgását sokszor kötöttségek korlátozzák. A leggyakoribbak a geometriai kötöttségek, amelyek esetén a testek egy adott merev nyugvó felületen vagy görbén mozoghatnak. Ilyen jellegû kényszerkapcsolat van pl. a híd egyik végének a rögzítésénél, ahol a híd görgõkön támaszkodik a talajra. A híd másik vége csuklóval rögzített.



18. ábra

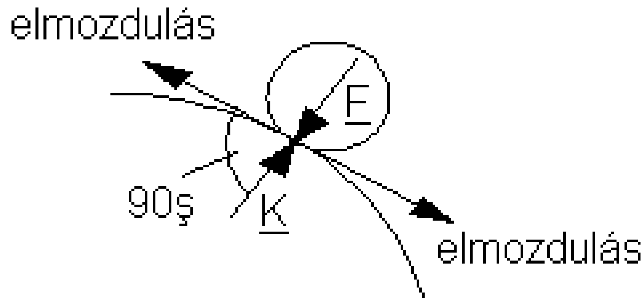
Kényszernek nevezzük a mozgást gátló elemeket, vagyis mindazokat a kapcsolatokat, erõhatásokat, amelyek egy test mozgását korlátozzák vagy megakadályozzák. Azokat az erõket, amelyeket a testre a kényszerek fejtenek ki, kényszererõknek vagy reakcióerõknek, a testet terhelõ ismert erõket pedig aktív erõknek nevezzük. A kényszerkapcsolatokból, a lehetséges elmozdulásokból következtetni lehet a kölcsönhatásként jelentkezõ kényszererõkre.

A kényszerek tárgyalásakor feltételezzük, hogy az érintkezõ testek felülete tökéletesen sima.

A kényszerek fajtái

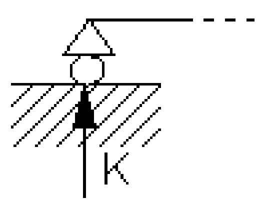
l. A megtámasztás:

olyan kényszer, amelynél a testet egy másik testre helyezzük.



19. ábra

Miután az érintkezõ felületek tökéletesen simák, ezért a közös érintõsík irányában nem lép fel erõ-így tehát a test ebben az irányban el is mozdulhat-emiatt a felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Vagyis a megtámasztásnál fellépõ kényszererõ mindig normális irányú. Jelölése:

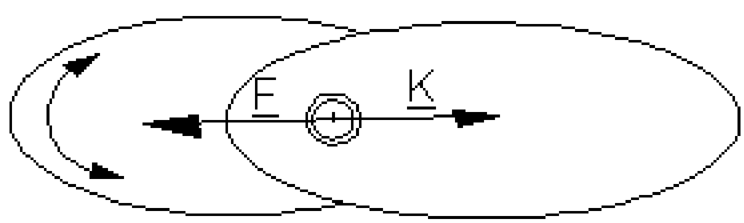


20. ábra

A megtámasztás l ismeretlent jelent: az erõ elõjeles nagyságát.

2. A síkcsukló:

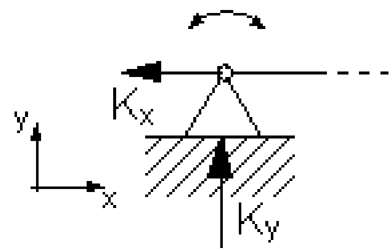
olyan kényszer, amely az egyik testnek egy másik testhez rögzített csap körüli elfordulását teszi lehetõvé.



21. ábra

Miután a csukló csak tengely körüli elfordulást tesz lehetõvé, elmozdulást pedig nem, ezért a kényszererõ a tengelyre merõleges síkban helyezkedik el, és átmegy a csukló geometriai középpontján.

Jele:

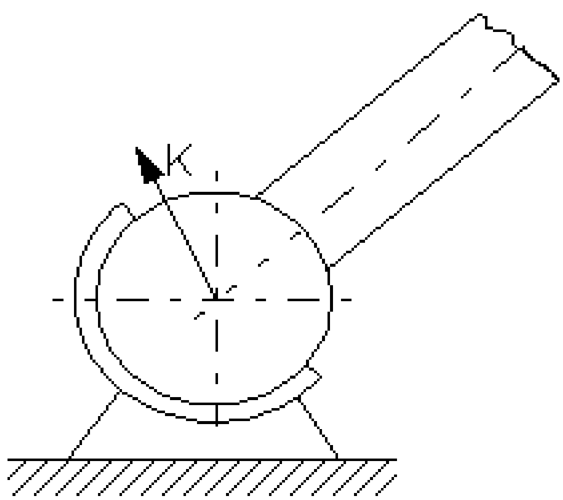


22. ábra

A síkcsukló 2 ismeretlent jelent: egy síkbeli erõ elõjeles nagyságát és irányát.

3. Gömbcsukló:

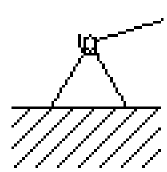
olyan kényszer, amely egy testnek egy másik testhez képest mozdulatlan pont körüli elfordulását teszi lehetõvé.



23. ábra

Mivel a test elfordulhat a pont körül, de el nem mozdulhat, ezért a kényszererõ egy olyan térbeli erõ, amely átmegy ezen a ponton.

Jele:

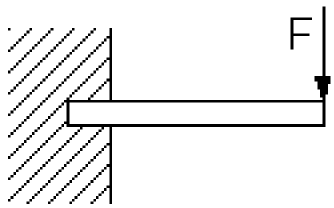


24. ábra

A gömbcsukló három ismeretlent jelent: egy térbeli erõ nagyságát és irányát.

4. A befogás:

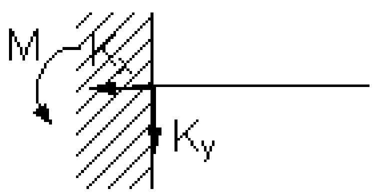
olyan kényszer, amely egy testet a megfogás helyén mereven rögzít a helytálló környezethez.



25. ábra

Miután a befogás nemcsak elmozdulást, hanem elfordulást sem tesz lehetõvé, ezért a fellépõ síkbeli kényszererõn kívül egy nyomaték is ébred a kényszer hatásaként. Ebbõl következik, hogy a befogás bármilyen tetszõleges erõrendszer átadására alkalmas,ill. bármelyik erõrendszerrel képes egyensúlyt tartani.

Jelölése:



26. ábra

A síkbeli befogás 3 ismeretlent jelent: egy síkbeli erõ irányát, nagyságát és egy nyomatékot.

A térbeli befogás 6 ismeretlent jelent: egy térbeli erõt (3) és egy nyomatékvektort (3).

5. A rúd:

összetett kényszer, amelyet súlytalannak tekintünk. Alakja lehet egyenes vagy síkgörbe. A rúd csak akkor tekinthetõ kényszernek, ha csak a végein kap terhelést. A csak a végein terhelt rúd akkor lehet egyensúlyban, ha a kényszererõ rúdirányú. A rúd egy olyan test, amelynek az egyik mérete (a hosszmenti) lényegesen nagyobb a másik kettõnél (a keresztmetszetnél).

A rúd 1 ismeretlent jelent: az erõ elõjeles nagyságát.

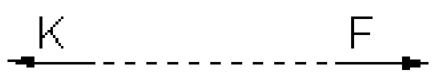
27. ábra

Rúdirány: a rúd két végpontját összekötõ egyenes.

6. A kötél

A kényszerként alkalmazott kötél súlytalan, nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony. A kötélben ébredõ kényszererõ mindig kötélirányú. Az egyensúly feltétele, hogy a kötél húzott legyen.

Jele:



28. ábra

A kötél 1 ismeretlent jelent: a húzóerõ nagyságát.

A statika a merev testek tartós nyugalmi helyzetének feltételével foglalkozik. A testek egyensúlyát mechanikai kényszerekkel biztosítjuk, ui. a test az aktív erõk és a kényszererõk hatására lesz nyugalomban.

2. Közös metszéspontú erõk egyensúlya

A közös támadáspontú, n erõbõl álló erõrendszer eredõje (a statika 3. alaptétele alapján):

$$\underline{R} = \sum_{1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_n$$

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$R_x = \sum F_{xi} = \sum X_i$$

$$R_y = \sum F_{yi} = \sum Y_i$$

$$R_z = \sum F_{zi} = \sum Z_i$$

Vezessük be a:

$$\begin{array}{lll} F_{x1} = X_1 & F_{x2} = X_2 & F_{xn} = X_n \\ F_{y1} = Y_1 & F_{y2} = Y_2 & F_{yn} = Y_n \\ F_{z1} = Z_1 & F_{z2} = Z_2 & F_{zn} = Z_n \end{array}$$

Az egyensúlyi erõrendszer egy speciális erõrendszer, amelynek hatására a testek mozgásállapotában nem következik be változás (Newton l. axiómája).Egyensúlyi erõrendszer esetén az eredõ erõ zérus: $\underline{R} = \underline{0}$.

A felírható 3 skalár egyenlet:

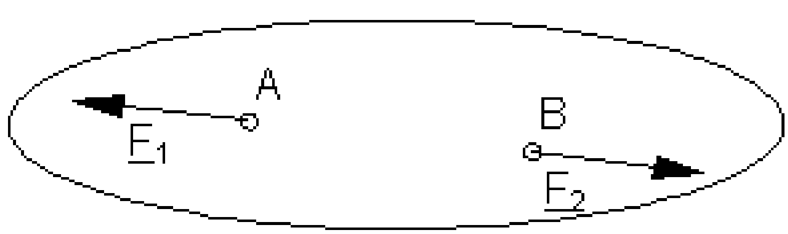
$$R_x = \sum X_i = 0$$

$$R_y = \sum Y_i = 0 \qquad \text{egyensúlyi egyenletek}$$

$$R_z = \sum Z_i = 0$$

Két erõ egyensúlya

A második alaptétel szerint a testre ható két erõ akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a két erõ hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentett.



$$\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$$

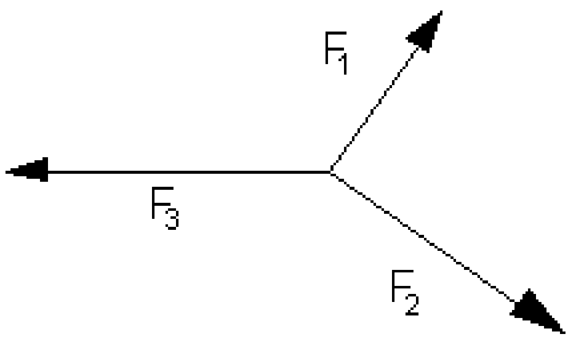
29. ábra

Három erõ egyensúlya

Három erõ egyensúlyát visszavezetjük két erõ egyensúlyára, ezért a három erõ közül tetszõleges kettõt az eredõjével helyettesítjük. Viszont a harmadik alaptétel szerint két erõ csak akkor helyettesíthetõ egyetlen erõvel, ha a két erõ metszi egymást, azaz közös síkban vannak. Ez esetben az eredõ is ugyanebbe a síkba esik. Evvel az eredõvel a harmadik erõ csak úgy tarthat egyensúlyt, ha az eredõvel közös síkba esik, vagyis ha a harmadik erõ is az elõbbi két erõ síkjában fekszik.

Három erõ egyensúlyának elsõ feltétele tehát, hogy a három erõ egy közös síkba essék.

Elõször az F1 és F2 erõk eredõjét határozzuk meg. Az eredõ vektorát a vektorháromszög adja, és az eredõ keresztülmegy a két erõ M metszéspontján. Egyensúly csak akkor lehet, ha F3 közös egyenesbe esik az F12 eredõvel, és F3 ugyanakkora csak ellentétes értelmû mint F12, vagyis F3 = - F12. A vektorháromszög F12 vektorának helyébe az F3-at rajzoljuk. Látható, hogy egyensúly esetén a vektorháromszög folytonos nyílfolyammal záródik.



30. ábra

Tehát három erõ egyensúlyának feltételei:

1. hatásvonaluk egy pontban metszõdik

2. vektorháromszögük záródik és folytonos nyílfolyamú.

és ezekbõl következõen hatásvonaluk közös síkban van

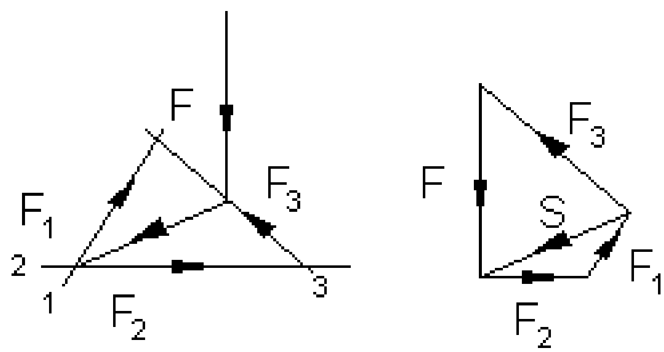
l. Közös síkban fekvõ négy erõ egyensúlya

Adott: egy erõ nagysága, iránya, értelme és vele közös síkban lévõ három erõ hatásvonala.

Feladat: a három adott hatásvonalon mûködõ erõk meghatározása úgy, hogy a kapott négy erõ egyensúlyban legyen.

A feladat egyértelmûen nem megoldható, vagyis határozatlan, ha mind a négy erõ közös ponton megy keresztül. Ha csak három erõ megy át egy közös ponton, a negyedik pedig különálló erõ, akkor pedig nem lehet egyensúly.

l. Culmann-féle szerkesztõ eljárás



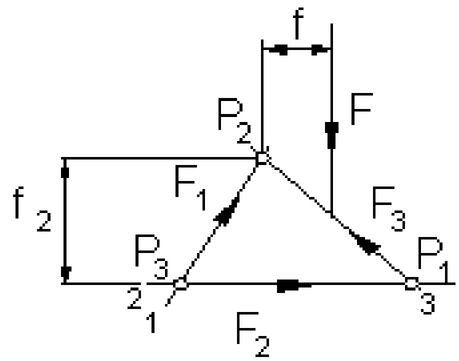
31. ábra

A négy erõ egyensúlyát három erõ egyensúlyára vezetjük vissza:

$\underline{F} + \underline{F1} + \underline{F2} + \underline{F3} = \underline{0}$ $\underline{F} + \underline{F12} + \underline{F3} = \underline{0}$ $\underline{F12} = \underline{S}$

Az F1 és F2 erõk eredõjérõl azt tudjuk, hogy átmegy az 1 és 2 hatásvonal metszéspontján, de az így maradt három erõ egyensúlyának feltétele többek között a közös metszéspont,így F12-nek az F és F3 metszéspontján is át kell mennie, így ismertté válik az F12 eredõ hatásvonala, az ún. segédirány. A kapott három erõvel megszerkesztve a záródó, folytonos nyílfolyamú vektorsokszöget, F1, F2 és F3 meghatározható. A módszer alkalmas egy erõ három síkbeli komponensre történõ felbontására is.

2. A Ritter-féle számító eljárás



32. ábra

Jelöljük ki két-két ismeretlen erõ hatásvonalának metszéspontját. Az így kapott pontok (P1, P2, P3) a vonatkozó erõk fõpontjai. Pl. a P2 fõpont az F2 erõ fõpontja. Írjuk fel a nyomatéki egyensúlyi egyenleteket a fõpontokra illeszkedõ, a szerkezet síkjára merõleges tengelyre.

Pl. F2 erõ meghatározása:

$$\sum_{(P_2)} \underline{M}_i = -f \cdot F + f_2 F_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{f}{f_2} \cdot F$$

Az eljárás elõnye, hogy a felírható egyenletekben csak egy ismeretlen van, a kiszámítandó erõ.

1.6 Az erõpár:

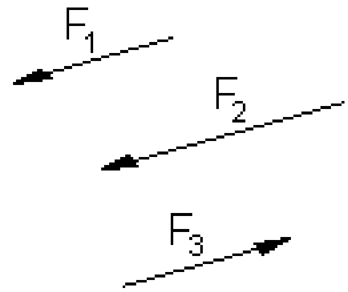
1. Fogalma és jellemzõi

2. Erõpárok összegzése

3. Közös síkú erõ és erõpár eredõje

1. Párhuzamos erõk

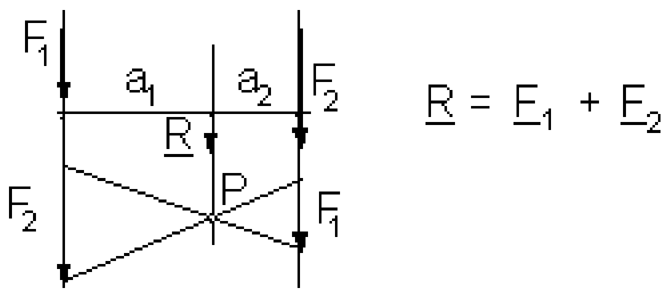
A párhuzamos erõkbõl álló erõrendszer az erõrendszerek egy speciális esete.



33. ábra

Az eredõ erõ: F = F1 + F2 +....+ Fn alapján meghatározható, vagyis ismert az eredõ erõ nagysága, iránya, értelme. Ismeretlen viszont a hatásvonala, mivel az erõk metszéspontja a végtelenben van. A feladat tehát az eredõ hatásvonal egy pontjának meghatározása, melyen keresztül a párhuzamos erõk hatásvonalával párhuzamost húzva megkapjuk az eredõ erõt. Ezen pont meghatározását a nyomatéki tétel alkalmazásával oldjuk meg. A kiindulás az, hogy az eredõ hatásvonalára az erõrendszer nyomatéka zérus kell, hogy legyen, mivel az eredõ egyetlen erõ.

a./ Két párhuzamos hatásvonalú, megegyezõ értelmû erõ eredõje



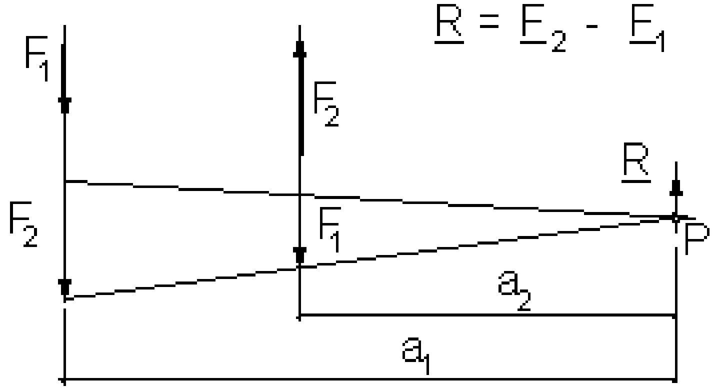
34. ábra

A szerkesztés menete: az egyik erõ vektorát rámérjük a másik hatásvonalára és viszont. Majd az egyik vektor kezdõpontját összekötjük a másik vektor végpontjával és viszont. Az így kapott (P) pont valóban az eredõ hatásvonalának egy pontja, mert a két háromszög hasonlóságából:

F1 / F2 = a2 / a1 => F1 · a1 = F2 · a2 => F2 · a2 - F1 · a1 = 0 = S Mi

Az eredõ hatásvonala mindig a két erõ hatásvonala közé esik.

b./ Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes értelmû erõ eredõje



35. ábra

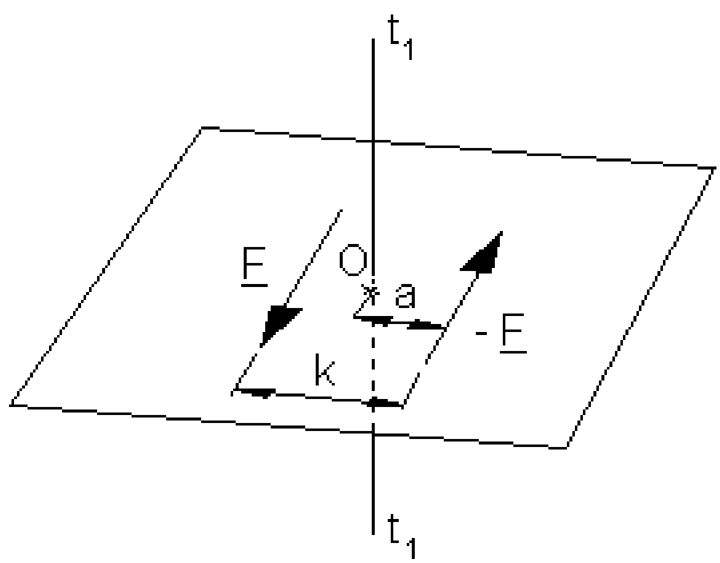
A szerkesztés menete ugyanúgy történik, mint a megegyezõ értelmû erõknél. Itt is felírható a két kapott háromszög hasonlósága alapján:

F2 / F1 = a1 / a2 => F1 · a1 = F2 · a2 => F1 · a1 - F2 · a2 = 0 = S Mi

Az eredõ hatásvonala a két erõ hatásvonala által határolt sávsíkon kívül a nagyobbik erõ oldalán van.

2. Az erõpár

Két egyenlõ nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellen- tétes értelmû erõbõl álló erõrendszert erõpárnak nevezzük. A két párhuzamos erõ síkot határoz meg, ez az erõpár síkja.



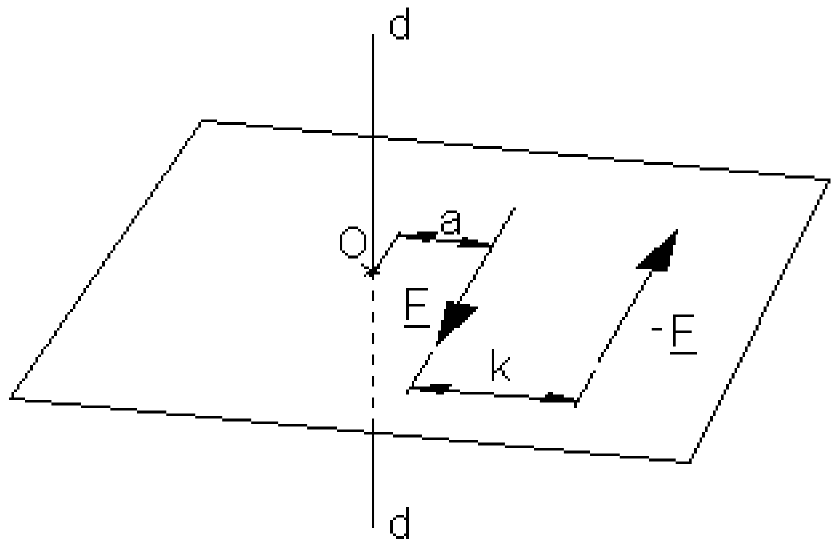
36. ábra

Ha az erõpár egy olyan merev lemezen hat, amely a síkjára merõleges t tengely körül elfordulhat, akkor az erõpára merevtestet a forgástengely körül el fogja forgatni, vagyis az erõpár forgatóhatással, nyomatékkal bír. Határozzuk meg az erõpárt alkotó erõknek a nyomatékát az O ponton átmenõ, az erõpár síkjára merõleges t tengelyre: M = F a + F (k - a) = F k

F: az egyik erõ nagysága, az erõpár alapja

k: az erõpárt alkotó két erõ merõleges távolsága, az erõpár karja

Ha a nyomatékot egy másik tengelyre írjuk fel:



37. ábra

M = F (a+k) - F a = F k => természetesen ugyanazt az összefüggést kapjuk. Az eredménybõl két fontos megállapítást tehetünk:

- A nyomaték nagysága nem függ az a mérettõl, vagyis nem függ a forgástengely helyzetétõl. Az erõpár nyomatéka a síkjára merõleges valamennyi tengelyre ugyanakkora.

- Az erõpár nyomatékát az egyik erõnek és az erõk merõleges távolságának szorzata adja: M = F k .

Tehát az erõpárt a síkja és a nyomatéka jellemzi. Az elõzõekbõl következik, hogy az erõpárt a saját síkjában párhuzamosan elcsúsztathatjuk, elforgathatjuk, ill. a saját síkjával párhuzamosan is eltolhatjuk. Bizonyítás nélkül is belátható, hogy az erõpár forgató hatása a síkjára merõleges bármely tengely körül változatlan marad.

Ha ugyanazon síkban, vagy párhuzamos síkokban ható két erõpár nyomatékának összege zérus, akkor a két erõpár egyensúlyban van. Ebbõl következik, hogy ha közös síkban vagy párhuzamos síkokban mûködõ két erõpár nyomatéka egyenlõ, akkor a két erõpár egymással egyenértékû. Az egyenértékûségbõl következik, hogy az erõpárnál sem az erõnek, sem a karnak külön-külön nincs jelentõsége. A kettõ szorzata, a nyomaték a fontos jellemzõ.

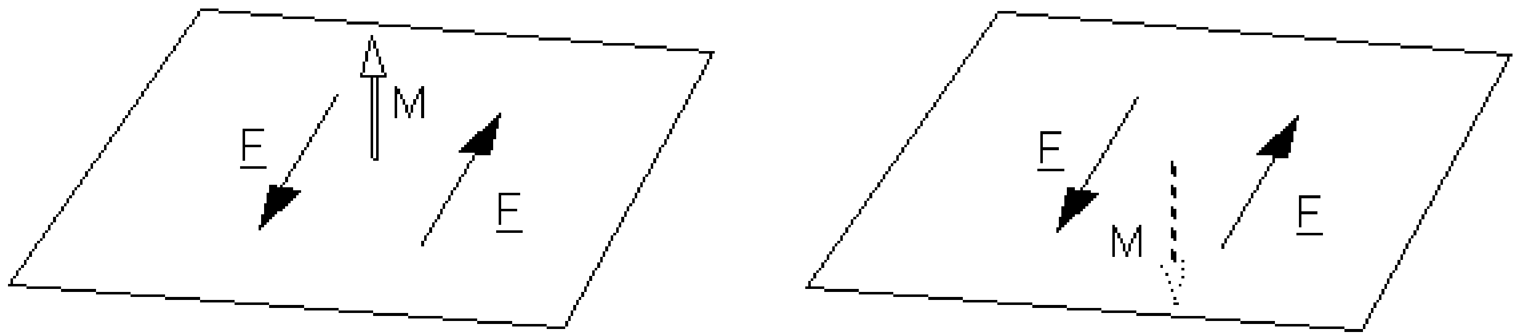
Mindezekbõl következik, hogy az erõpárnak három meghatározó jellemzõje van:

- síkjának állása

- a forgató hatás, a nyomaték értelme

- a nyomaték nagysága.

Tehát az erõpár egy vektorral jellemezhetõ. Az erõpár nyomatékvektora az erõpár síkjának normálvektora irányába mutat. Nagysága F · k. Értelmét úgy vesszük fel, hogy a nyílból nézve a forgásnak az óramutató járásával ellentétesnek kell lennie (jobbmenetû csavar).



38. ábra

Miután a nyomatékvektor egyértelmûen megadja az erõpárt, ezért a statikában koncentrált erõpárokkal foglalkozunk, ahol F és k értéke lényegtelen, csak $\underline{M}$ a fontos. Értelmezésénél fogva az erõpár nyomatékvektora nem kötött vektor-szemben az erõvektorral-, hanem szabad vektor, ui. a tér bármely pontjához hozzárendelhetõ.

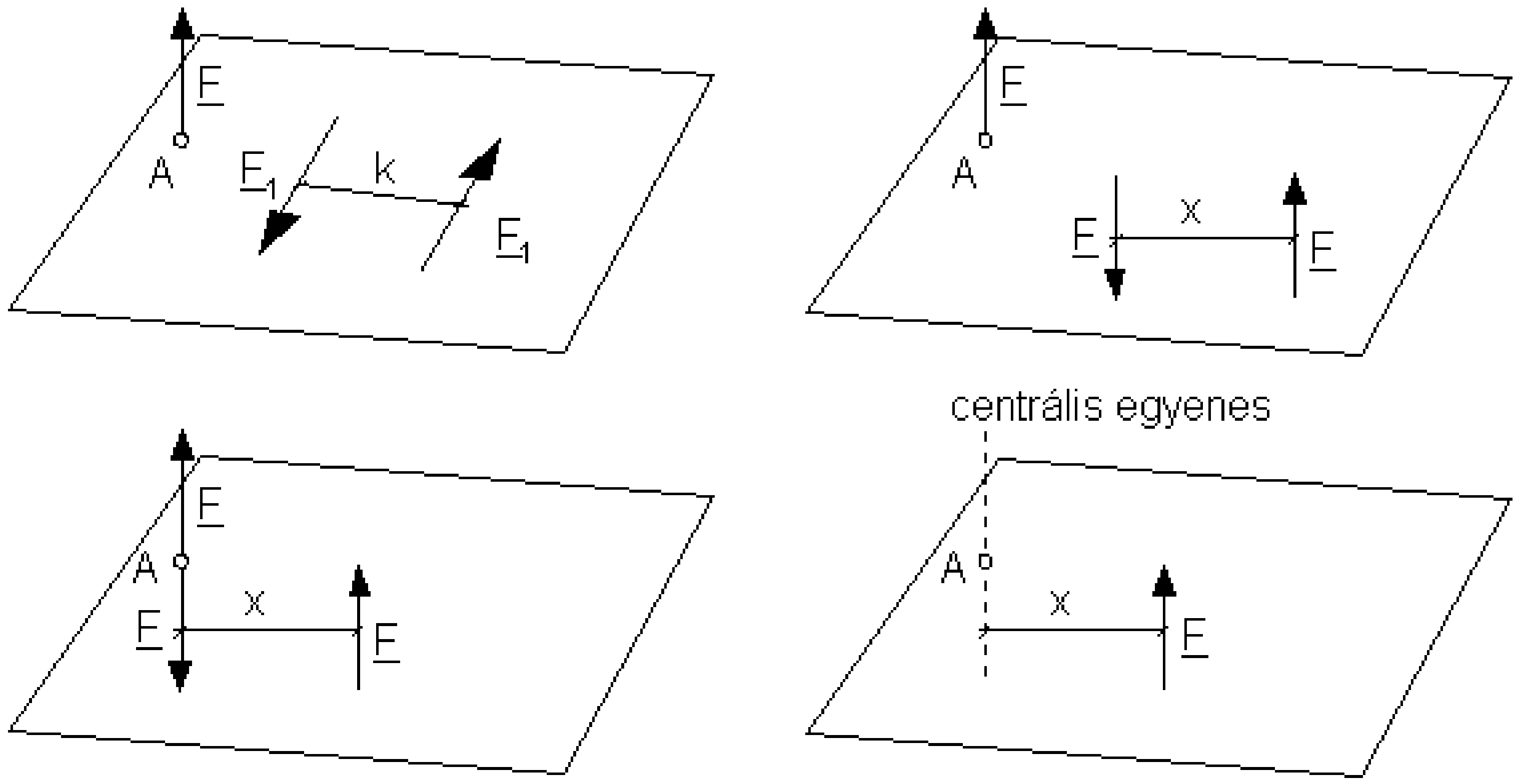
Az erõpárok nyomatékvektorai az erõvektorokhoz hasonlóan, a vektoralgebra szabályai szerint összegezhetõk: $\underline{M} = \underline{M1} + \underline{M2}$

Az erõpár, hasonlóan az erõhöz önálló terhelés. A testeket tehát erõk és erõpárok terhelik.

Közös síkú erõ és erõpár eredõje

Tétel: Közös síkban fekvõ erõ és erõpár mindig helyettesíthetõ egyetlen erõvel,vagyis a közös síkú erõ és erõpár eredõje egyetlen erõ.

Ennek igazolása a következõ ábrán látható:



39.a,b,c,d ábra

A merev testre F k nyomatékú erõpár és a test A pontjában az erõpár síkjával párhuzamos F erõ hat. Feladat az adott erõrendszer eredõjének a meghatározása. A megoldás lépései:

1. Az F k nyomatékú erõpárt párhuzamosan eltoljuk az A ponton átmenõ síkba,és itt helyettesítjük Fx = Fk erõpárral.

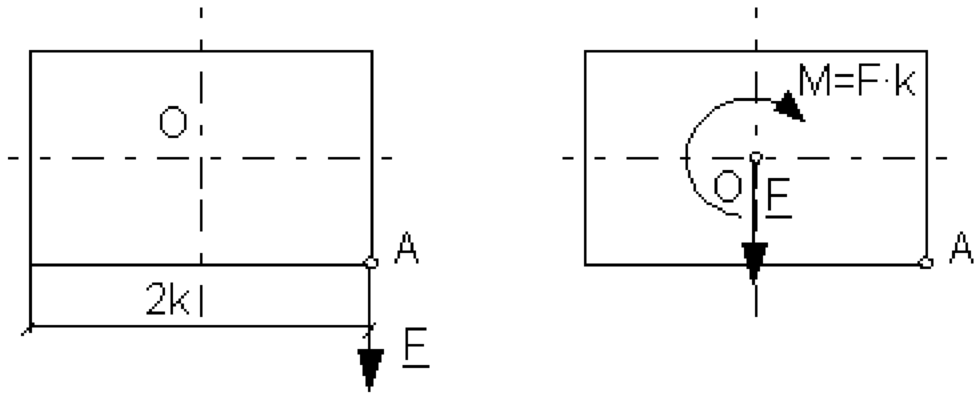
2. Ezt az Fx erõpárt - a c. ábrának megfelelõen - az adott F erõ hatásvonalába úgy toljuk el ,hogy az erõpár két ereje közül az adott F erõ hatásvonalába az F erõvel ellentétes értelmû erõ kerüljön.

3. Az A pontban a két F nagyságú erõ egyensúlyt tart. Ezek a negyedik alaptétel értelmében elhagyhatók, így eredõül egyetlen F erõ marad ,párhuzamosan eltolt helyzetben. Az eltolás mértéke: x = F1 · k / F.

Az erõ eltolásakor olyan helyzetbe kerül, hogy az eltolt hatásvonalú F erõ az adott A ponton átmenõ és a síkra merõleges tengely körül úgy forgat mint az adott F k nyomatékú erõpár forgatott. A szabályt így fogalmazhatjuk meg:

Az erõ és a vele párhuzamos síkú erõpár eredõje egyetlen erõ, éspedig az adott erõvel egyezõ erõ, párhuzamosan eltolt helyzetben; ennek az eltolt helyzetû erõnek a nyomatéka a tér bármely pontjára egyenlõ az eredeti erõrendszer (az A ponton átmenõ erõ és az erõpár) ugyanerre a pontra számított nyomatékával. Az eltolt helyzetben lévõ eredõ erõ hatásvonalát centrális egyenesnek nevezik. Így a szabály másképpen is fogalmazható: Egy erõ és vele párhuzamos síkú erõpár eredõje egyetlen erõ, amelynek hatásvonala a centrális egyenes (a centrális egyenes: a végsõ redukálás eredményeként kapott egyetlen erõ hatásvonala).

A feladat megfordítása az erõ áthelyezése, redukálása: Ha az erõt önmagával párhuzamosan új helyzetbe toljuk el, akkor melléje társul egy erõpár. Az eltolt helyzetû erõnek és az erõpárnak együttes hatása azonos azzal a hatással, amit az eredeti erõ az eredeti helyén fejt ki a merev testre.



40. ábra

Helyezzük át az A pontban ható F erõt az O pontba. Eredmény: az O pontban az F erõ és egy M = F·k erõpár, amely az eredeti (A pontbeli) F erõvel azonos értelemben forgat O pont körül.

1.6 Az erõpár:

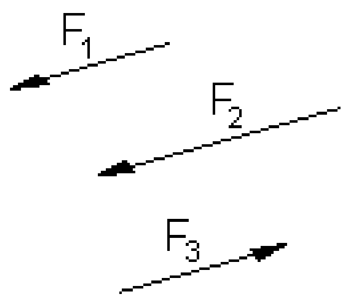
1. Fogalma és jellemzõi

2. Erõpárok összegzése

3. Közös síkú erõ és erõpár eredõje

1. Párhuzamos erõk

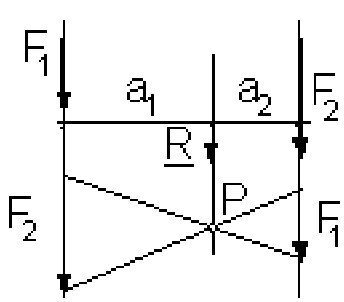
A párhuzamos erõkbõl álló erõrendszer az erõrendszerek egy speciális esete.



33. ábra

Az eredõ erõ: $\underline{F} = \underline{F1} + \underline{F2} + ... + \underline{Fn}$ alapján meghatározható, vagyis ismert az eredõ erõ nagysága, iránya, értelme. Ismeretlen viszont a hatásvonala, mivel az erõk metszéspontja a végtelenben van. A feladat tehát az eredõ hatásvonal egy pontjának meghatározása, melyen keresztül a párhuzamos erõk hatásvonalával párhuzamost húzva megkapjuk az eredõ erõt. Ezen pont meghatározását a nyomatéki tétel alkalmazásával oldjuk meg. A kiindulás az, hogy az eredõ hatásvonalára az erõrendszer nyomatéka zérus kell, hogy legyen, mivel az eredõ egyetlen erõ.

a./ Két párhuzamos hatásvonalú, megegyezõ értelmû erõ eredõje



$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

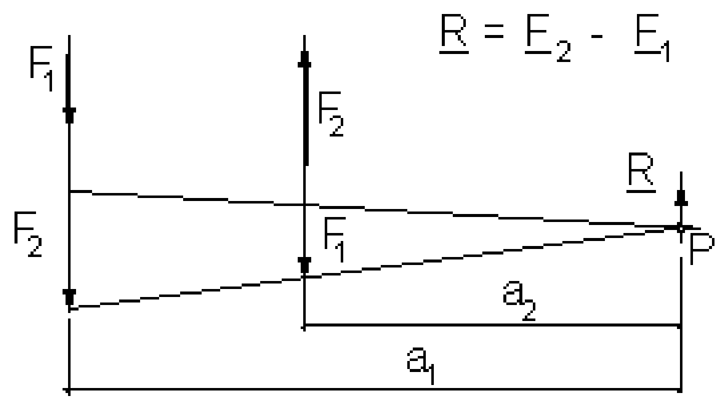
34. ábra

A szerkesztés menete: az egyik erõ vektorát rámérjük a másik hatásvonalára és viszont. Majd az egyik vektor kezdõpontját összekötjük a másik vektor végpontjával és viszont. Az így kapott (P) pont valóban az eredõ hatásvonalának egy pontja, mert a két háromszög hasonlóságából:

F1 / F2 = a2 / a1 => F1 · a1 = F2 · a2 => F2 · a2 - F1 · a1 = 0 = S Mi

Az eredõ hatásvonala mindig a két erõ hatásvonala közé esik.

b./ Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes értelmû erõ eredõje



35. ábra

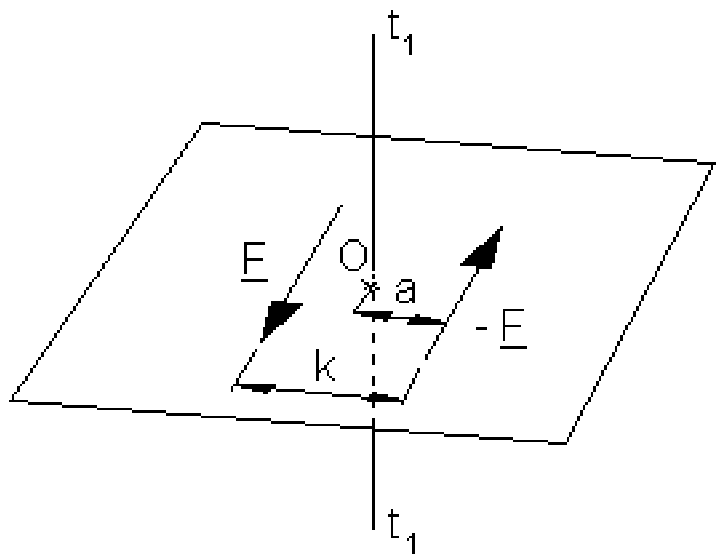
A szerkesztés menete ugyanúgy történik, mint a megegyezõ értelmû erõknél. Itt is felírható a két kapott háromszög hasonlósága alapján:

F2 / F1 = a1 / a2 => F1 · a1 = F2 · a2 => F1 · a1 - F2 · a2 = 0 = Szumma(Mi)

Az eredõ hatásvonala a két erõ hatásvonala által határolt sávsíkon kívül a nagyobbik erõ oldalán van.

2. Az erõpár

Két egyenlõ nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellen- tétes értelmû erõbõl álló erõrendszert erõpárnak nevezzük. A két párhuzamos erõ síkot határoz meg, ez az erõpár síkja.



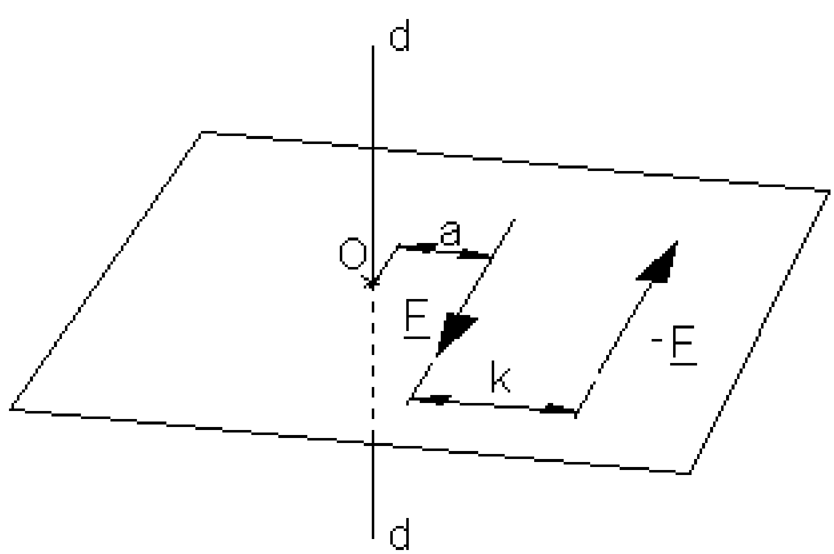
36. ábra

Ha az erõpár egy olyan merev lemezen hat, amely a síkjára merõleges t tengely körül elfordulhat, akkor az erõpára merevtestet a forgástengely körül el fogja forgatni, vagyis az erõpár forgatóhatással, nyomatékkal bír. Határozzuk meg az erõpárt alkotó erõknek a nyomatékát az O ponton átmenõ, az erõpár síkjára merõleges t tengelyre: M = F a + F (k - a) = F k

F: az egyik erõ nagysága, az erõpár alapja

k: az erõpárt alkotó két erõ merõleges távolsága, az erõpár karja

Ha a nyomatékot egy másik tengelyre írjuk fel:



37. ábra

M = F (a+k) - F a = F k => természetesen ugyanazt az összefüggést kapjuk. Az eredménybõl két fontos megállapítást tehetünk:

- A nyomaték nagysága nem függ az a mérettõl, vagyis nem függ a forgástengely helyzetétõl. Az erõpár nyomatéka a síkjára merõleges valamennyi tengelyre ugyanakkora.

- Az erõpár nyomatékát az egyik erõnek és az erõk merõleges távolságának szorzata adja: M = F k .

Tehát az erõpárt a síkja és a nyomatéka jellemzi. Az elõzõekbõl következik, hogy az erõpárt a saját síkjában párhuzamosan elcsúsztathatjuk, elforgathatjuk, ill. a saját síkjával párhuzamosan is eltolhatjuk. Bizonyítás nélkül is belátható, hogy az erõpár forgató hatása a síkjára merõleges bármely tengely körül változatlan marad.

Ha ugyanazon síkban, vagy párhuzamos síkokban ható két erõpár nyomatékának összege zérus, akkor a két erõpár egyensúlyban van. Ebbõl következik, hogy ha közös síkban vagy párhuzamos síkokban mûködõ két erõpár nyomatéka egyenlõ, akkor a két erõpár egymással egyenértékû. Az egyenértékûségbõl következik, hogy az erõpárnál sem az erõnek, sem a karnak külön-külön nincs jelentõsége. A kettõ szorzata, a nyomaték a fontos jellemzõ.

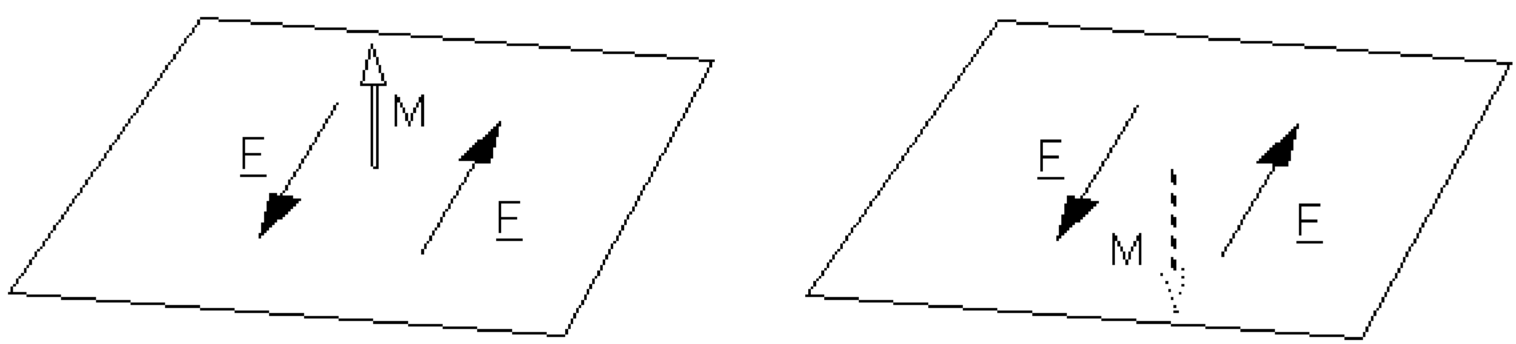
Mindezekbõl következik, hogy az erõpárnak három meghatározó jellemzõje van:

- síkjának állása

- a forgató hatás, a nyomaték értelme

- a nyomaték nagysága.

Tehát az erõpár egy vektorral jellemezhetõ. Az erõpár nyomatékvektora az erõpár síkjának normálvektora irányába mutat. Nagysága F · k. Értelmét úgy vesszük fel, hogy a nyílból nézve a forgásnak az óramutató járásával ellentétesnek kell lennie (jobbmenetû csavar).



38. ábra

Miután a nyomatékvektor egyértelmûen megadja az erõpárt, ezért a statikában koncentrált erõpárokkal foglalkozunk, ahol F és k értéke lényegtelen, csak M a fontos. Értelmezésénél fogva az erõpár nyomatékvektora nem kötött vektor-szemben az erõvektorral-, hanem szabad vektor, ui. a tér bármely pontjához hozzárendelhetõ.

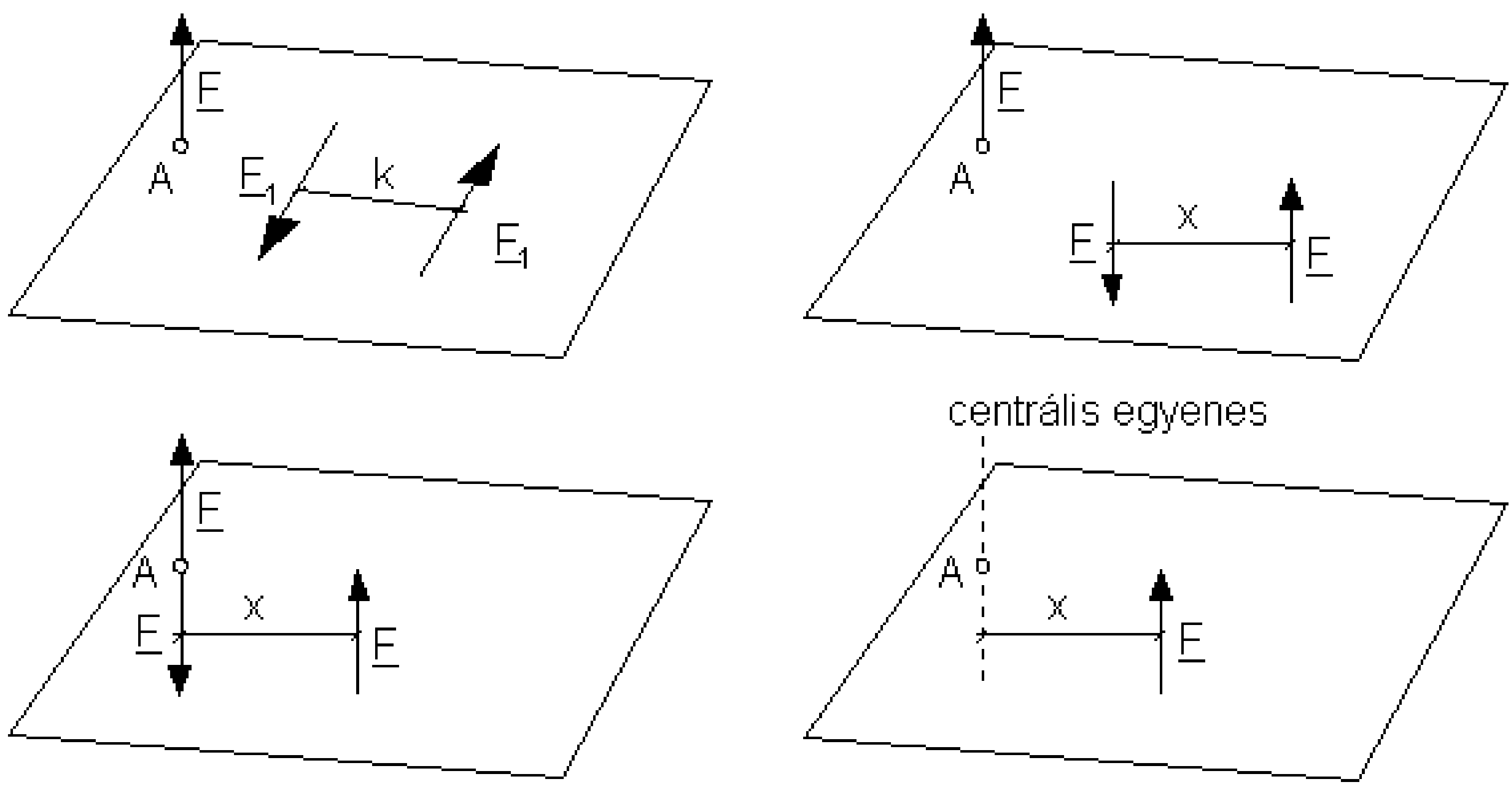
Az erõpárok nyomatékvektorai az erõvektorokhoz hasonlóan, a vektoralgebra szabályai szerint összegezhetõk: M = M1 + M2

Az erõpár, hasonlóan az erõhöz önálló terhelés. A testeket tehát erõk és erõpárok terhelik.

Közös síkú erõ és erõpár eredõje

Tétel: Közös síkban fekvõ erõ és erõpár mindig helyettesíthetõ egyetlen erõvel,vagyis a közös síkú erõ és erõpár eredõje egyetlen erõ.

Ennek igazolása a következõ ábrán látható:



39.a,b,c,d ábra

A merev testre F k nyomatékú erõpár és a test A pontjában az erõpár síkjával párhuzamos F erõ hat. Feladat az adott erõrendszer eredõjének a meghatározása. A megoldás lépései:

1. Az F k nyomatékú erõpárt párhuzamosan eltoljuk az A ponton átmenõ síkba,és itt helyettesítjük Fx =

Fk erõpárral.

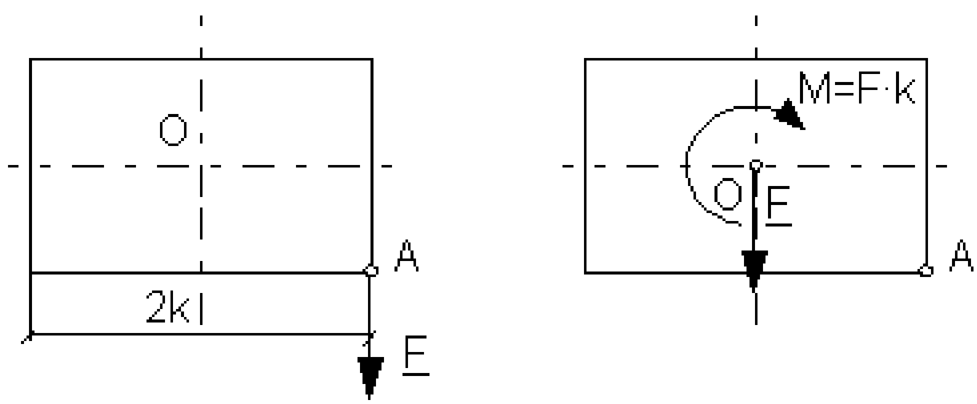
2. Ezt az Fx erõpárt - a c. ábrának megfelelõen - az adott F erõ hatásvonalába úgy toljuk el ,hogy az erõpár két ereje közül az adott F erõ hatásvonalába az F erõvel ellentétes értelmû erõ kerüljön.

3. Az A pontban a két F nagyságú erõ egyensúlyt tart. Ezek a negyedik alaptétel értelmében elhagyhatók, így eredõül egyetlen F erõ marad ,párhuzamosan eltolt helyzetben. Az eltolás mértéke: x = F1 · k / F.

Az erõ eltolásakor olyan helyzetbe kerül, hogy az eltolt hatásvonalú F erõ az adott A ponton átmenõ és a síkra merõleges tengely körül úgy forgat mint az adott F k nyomatékú erõpár forgatott. A szabályt így fogalmazhatjuk meg:

Az erõ és a vele párhuzamos síkú erõpár eredõje egyetlen erõ, éspedig az adott erõvel egyezõ erõ, párhuzamosan eltolt helyzetben; ennek az eltolt helyzetû erõnek a nyomatéka a tér bármely pontjára egyenlõ az eredeti erõrendszer (az A ponton átmenõ erõ és az erõpár) ugyanerre a pontra számított nyomatékával. Az eltolt helyzetben lévõ eredõ erõ hatásvonalát centrális egyenesnek nevezik. Így a szabály másképpen is fogalmazható: Egy erõ és vele párhuzamos síkú erõpár eredõje egyetlen erõ, amelynek hatásvonala a centrális egyenes (a centrális egyenes: a végsõ redukálás eredményeként kapott egyetlen erõ hatásvonala).

A feladat megfordítása az erõ áthelyezése, redukálása: Ha az erõt önmagával párhuzamosan új helyzetbe toljuk el, akkor melléje társul egy erõpár. Az eltolt helyzetû erõnek és az erõpárnak együttes hatása azonos azzal a hatással, amit az eredeti erõ az eredeti helyén fejt ki a merev testre.



40. ábra

Helyezzük át az A pontban ható F erõt az O pontba. Eredmény: az O pontban az F erõ és egy M = F·k erõpár, amely az eredeti (A pontbeli) F erõvel azonos értelemben forgat O pont körül.

1.8 általános síkbeli és térbeli erõrendszerek:

1. Eredõje ill. redukálása

2. Egyensúlya

1. Síkbeli erõrendszer eredõje és egyensúlya

1./ Közös metszéspontú erõrendszer

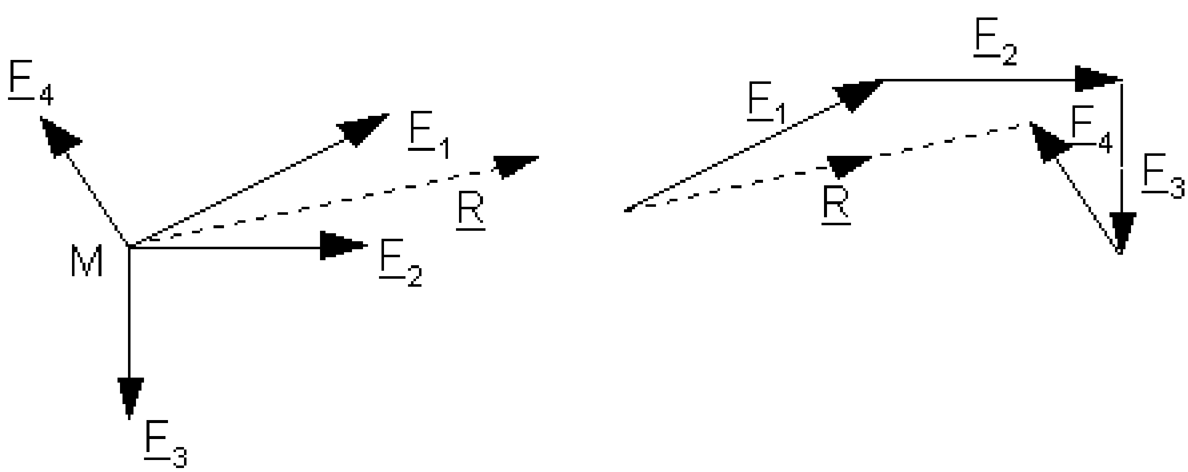
Eredõ:

$\underline{R} = \underline{F1} + ... + \underline{Fn}$ (nagysága, iránya)

Rx = Szumma(Xi)

Ry = Szumma(Yi)

Hatásvonalának egy pontja: a közös metszéspont. Szerkesztéssel: a vektorpoligonnal kiszerkesztett eredõvel párhuzamost húzunk a közös metszésponton keresztül:

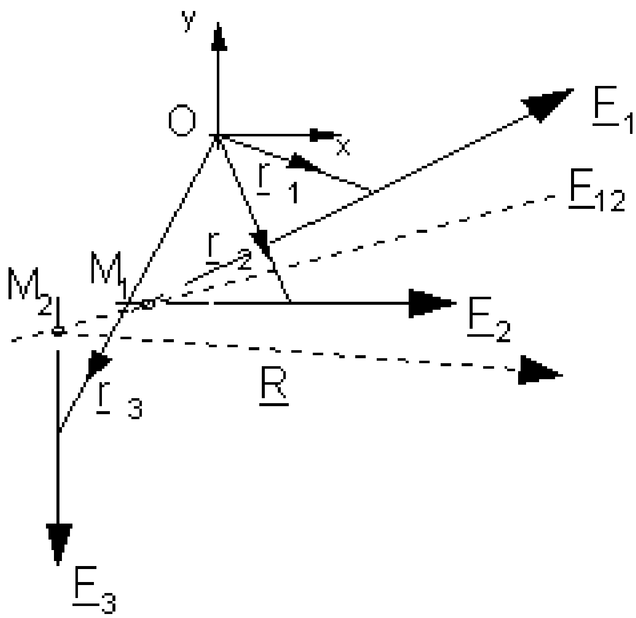


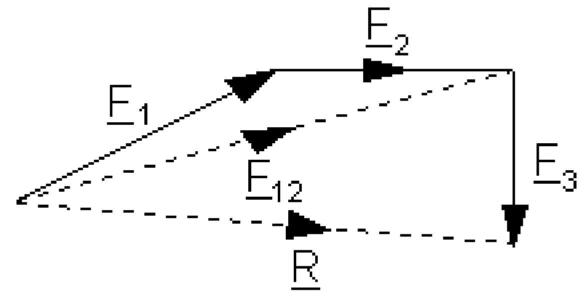
41. ábra

Egyensúly esetén: $\underline{R} = \underline{0}$ azaz Szumma(Xi) = $\underline{0}$ Szumma(Yi) = $\underline{0}$,

2./ Általános síkbeli erõrendszer

Eredõ: az erõrendszer redukáltja a sík egy tetszõleges pontjába általános esetben egy erõ és egy, a síkra merõleges vektorú erõpár (ami tovább redukálható egyetlen erõvé): [R;M] . Szerkesztéssel:





42. ábra

Számítással:

Rx = Szumma(Xi) és Ry = Szumma(Yi)

<u>M</u> = Szumma (<u>r</u> x <u>Fi)</u> + Szumma (<u>Mj)</u> = M0z <u>k</u>

Mivel <u>R</u> és <u>M</u> egymásra merõlegesek, ezért a közös síkú erõ és erõpár eredõjének meghatározásánál tanultak szerint helyettesíthetõ egyetlen egy erõvel. Egyensúly esetén: [<u>R</u>; <u>M</u>] = [<u>0</u>; <u>0</u>] azaz

Szumma(Xi) = 0

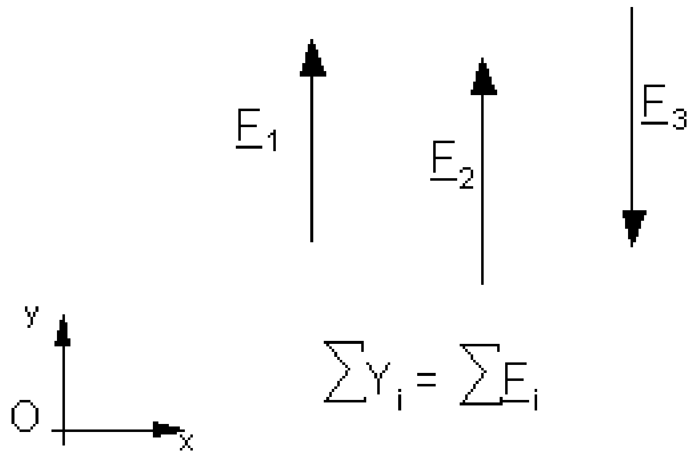
Szumma(Yi) = 0

Szumma(Mi) +Szumma(Mj) = Szumma(xi Yi -yi Xi)+SzummaM = 0

3./ Síkbeli párhuzamos erõrendszer

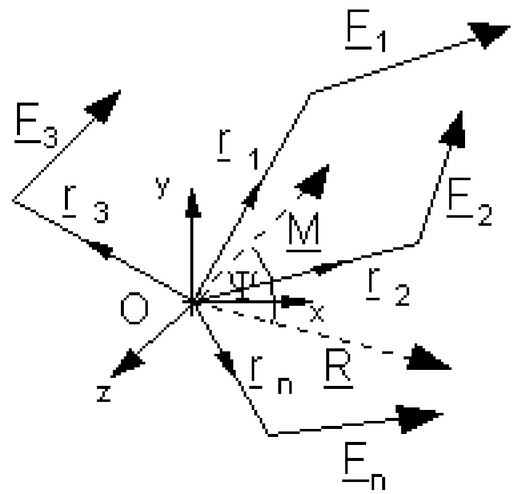
Eredõ: meghatározása hasonlóan történik, mint az általános erõrendszer esetén. Itt azonban lehetõség van egyszerûsítésre, ui. a számító eljárás során az egyik koordináta-tengelyt-pl. az y tengelyt-a közös erõiránnyal párhuzamosan vesszük fel, így minden x irányú összetevõ eleve zérus. Az eredõ tehát: [<u>R</u>; <u>M</u>] = [Szumma(Yi <u>i</u>; <u>M0</u>].

Szerkesztésnél az eredõ erõ meghatározását egyszerû algebrai összegzéssel végezhetjük el. Az eredõ hatásvonalának egy pontját ún. kötélsokszög-szerkesztéssel állítjuk elõ.



43. ábra

2. Általános térbeli erõrendszer eredõje és egyensúlya Redukáljuk a merev test P1, P2,...,Pn pontjain támadó F1, F2,..., Fn térben szétszórt erõket. Az erõrendszer redukálása ugyanúgy történik mint síkbeli esetben, vagyis az összes erõt áthelyezzük egy tetszõlegesen kiválasztott O pontba



44. ábra

Az erõknek az O pontba való áthelyezése után ott R= Szumma Fi eredõ erõt és M = Szumma(ri x F)+ S Mj nyomatékú eredõ erõpárt kapunk. Az R erõ és M nyomatékvektor Y szöget zárnak be, melynek nagysága az R M = |R||M|cosY egyenletbõl számítható.

cos pszi = (R · M) / |R||M| = (X·Mx + Y·My + Z·Mz) / R·M.

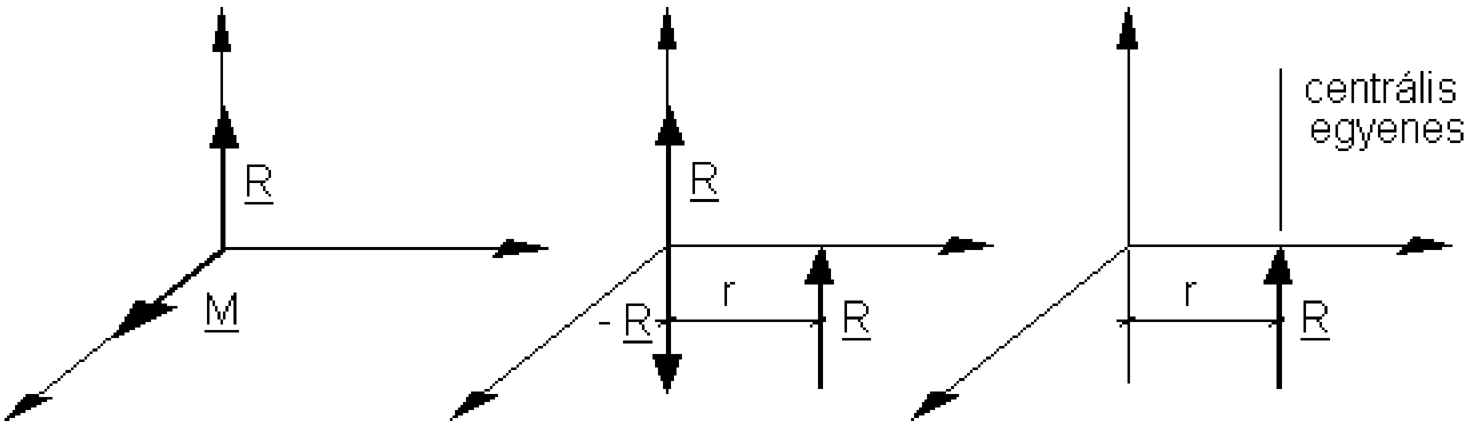
Lehetséges esetek:

1./ R ¹ 0 és M = 0 az eredõ egy erõ.

2./ R = 0 és M ¹ 0 az eredõ egy erõpár.

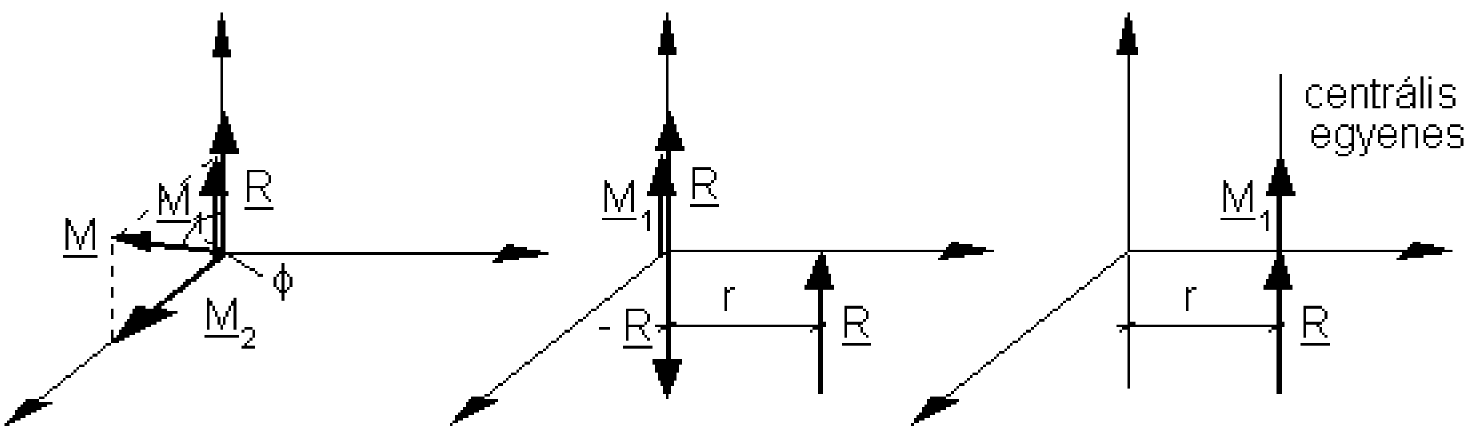
3./ R ^ M Ilyenkor Y = 90º és cos Y = 0 , vagyis: M R = 0.(Ez az eset fordult elõ a síkbeli erõk vizsgálatánál). Skalárisan: X Mx + Y My + Z Mz = 0

Ilyen esetben az erõ és az erõpár egyetlen erõvé redukálható (Speciális ponton átmenõ centrális egyenes).



45. ábra

4./ R M ¹ 0. Ilyenkor az erõrendszert ún. erõcsavarrá redukáljuk a következõképpen:



46. ábra

M = M cosf és M = M sinf

A centrális egyenes egy speciális pontjába mutató helyvektor (r) meghatározása: Az ábrából láthatóan: r x R = M.

Ha mindkét oldalt megszorozzuk R-el, és a kettõs vektor-szorzat kifejtési tételét alkalmazzuk:

$\underline{R} \times (\underline{r} \times \underline{R}) = \underline{R} \times \underline{M2}$ és $\underline{r}\, |\underline{R}|^2 - \underline{R}\, (\underline{r}\, \underline{R}) = \underline{R} \times \underline{M2}$

de $\underline{r} \cdot \underline{R} = 0$, mert $\underline{r} \wedge \underline{R}$

(Ezért választottunk olyan speciális $\underline{r}$ vektort, amely merõleges R vektorra.).

Így $\underline{r} = (\underline{R} \times \underline{M2}) / |\underline{R}|^2$.

Mivel $\underline{R}$ és $\underline{M}$ vektorok párhuzamosak, szabad mindkét oldalhoz hozzáadni $(\underline{R} \times \underline{M1}) / |\underline{R}|^2 = \underline{0}$ vektort, így $\underline{r} = (\underline{R} \times \underline{M2}) / |\underline{R}|^2 + (\underline{R} \times \underline{M1}) / |\underline{R}|^2$ ezzel $\underline{r} = (\underline{R} \times \underline{M0}) / |\underline{R}|^2$.

5./ $\underline{R} = \underline{0}$ és $\underline{M} = \underline{0}$. Ilyenkor az erõrendszer egyensúlyban van.

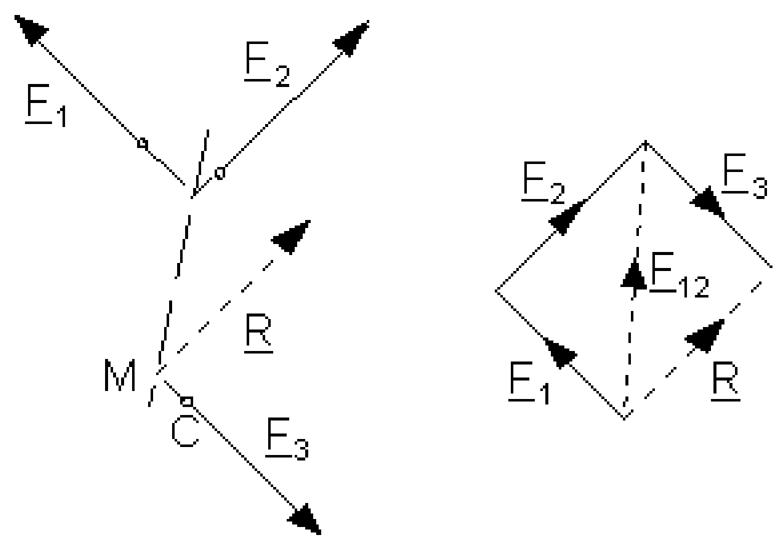
1.10 Síkbeli erõrendszer eredõjének meghatározása szerkesztéssel:

1. közvetlen úton

2. kötélsokszög útján.

1. Eredõ szerkesztése közvetlen úton

A merev test A pontjában F1, B pontjában F2, stb. közös síkba esõ erõk hatnak. Határozzuk meg az erõrendszer eredõjét szerkesztéssel!



47. ábra

Az eredõ vektora a vektorpoligonból, az adott erõk vektorainak geometriai összegzésébõl - függetlenül az erõk összetevésének sorrendjétõl - meghatározható. Ezzel szemben az eredõ helyének, ill. a hatásvonal egy pontjának a meghatározásához az erõparalelogramma tétel ismételt alkalmazására van szükség, amelynek menete:

$\underline{F1} + \underline{F2} + \underline{F3} + \ldots + \underline{Fn} = \underline{R}$

$\underline{F12} + \underline{F3} + \ldots + \underline{Fn} = \underline{R}$

$\underline{F123} + \ldots + \underline{Fn} = \underline{R}$

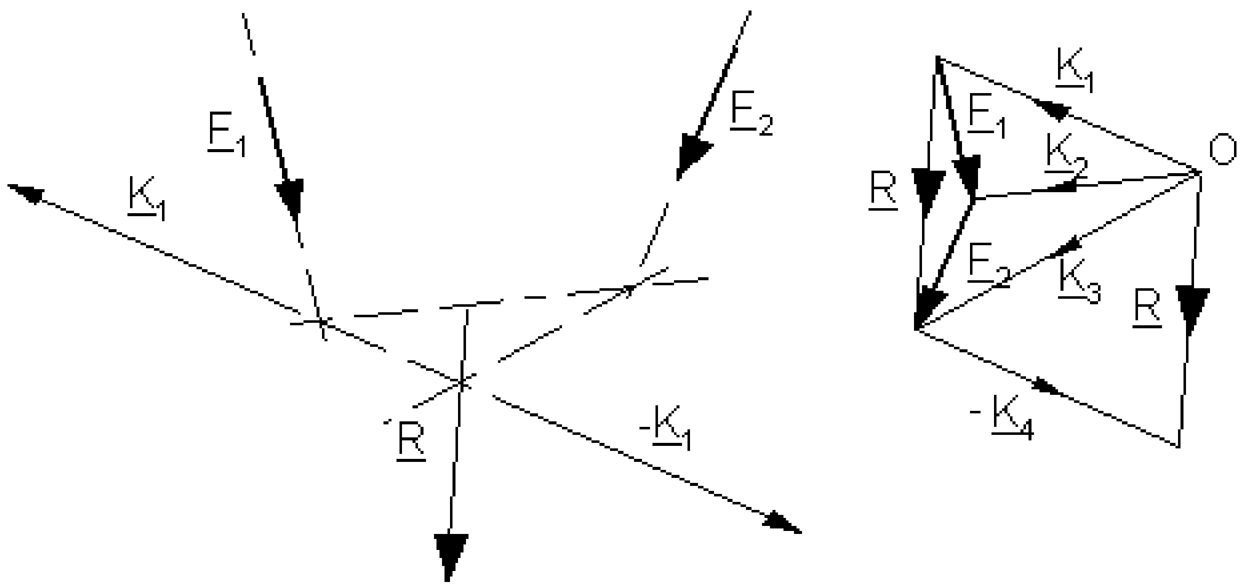
Az erõrendszer eredõjének szempontjából három jellegzetes esetet különböztethetünk meg:

a./ Az adott erõrendszer eredõje egy erõ b./ Az adott erõrendszer eredõje egy erõpár

c./ Az adott erõrendszer egyensúlyban van.

2. Eredõ szerkesztése kötélsokszög útján

A merev test A pontjában F1, B pontjában F2 erõ hat. Határozzuk meg az eredõt!



48. ábra

A vektorpoligonból az eredõ R vektor kiadódik: F1 + F2 = R. F hatásvonala keresztülmegy F1 és F2 metszéspontján, de az most nem hozzáférhetõ. Ezért az adott erõkhöz tetszõlegesen választott, de alkalmas irányú - az adott erõkkel jó metszõdéseket biztosító - K1 és (-K1) erõkbõl álló egyensúlyi erõrendszert adunk (4. alaptétel alapján). Ennek értelmében módosítjuk a vektorpoligont de úgy, hogy a K1 vektort az F elé soroljuk: K1 + F1 + F2 + (-K1) = R.

A K1, (-K1) erõrendszer felvételével az eredõ hatásvonalának egy pontját, az M pontot volt célunk megszerkeszteni. Ezt a célt azonban bizonyos egyszerûsítéssel is elérhetjük:

1./ A vektorpoligonban felesleges a (-K1) és az OO1 = R vektorokat megrajzolni, mert az eredõ vektora mint az F1 és F2 vektorok összege is kiadódik.

2./ Felesleges a (-K1) erõ hatásvonalát külön kihangsúlyozni, mert ez a hatásvonal K1 hatásvonalával egybeesik, így az M metszéspont mint a K1 és K3 erõk metszõdése adódik.

Az eredõ szerkesztését gépiesen a következõ módon végezzük:

1./ Az adott erõkbõl folytonos nyílfolyammal vektorpoligont szerkesztünk. Az eredõ vektora a kezdõponttól a végpontig terjed (nyílütközéssel).

2./ Egy tetszõlegesen felvett O pontból (pólus) a vektorsokszög vektorainak kezdõ, ill. végpontjaihoz egy-egy egyenest (sugár) húzva a vektoridomot állítjuk elõ.

3./ Megrajzoljuk a kötélsokszöget úgy, az F1 vektort megelõzõ K1 sugárral párhuzamosan rajzoljuk az F1 hatásvonalát megelõzõ elsõ kötéloldalt, majd az F1 hatásvonalán adódó metszéspontból folytatjuk a szerkesztést úgy, hogy e ponton keresztül párhuzamosat húzunk az F1-et követõ, illetve az F2-t megelõzõ K2 sugárral. Így nyerjük sorra a további kötéloldalakat, végül a kötélsokszög utolsó utolsó oldala természetesen az utolsó vektort követõ sugárral párhuzamos.

4./ Az elsõ és az utolsó kötéloldal metszéspontjában az eredõ vektorával párhuzamosan rajzolt egyenes adja az eredõ hatásvonalát.

Az összetartozó vektor- és kötélsokszögek reciprok alakzatok:

1./ A kötélsokszög egyes oldalai párhuzamosak a vektorsokszög megfelelõ vektorsugaraival.

2./ A kötélsokszögben két erõ és a közöttük fekvõ kötélszakasz háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a vektorsokszögben egy pont felel meg, amelyben a háromszöget alkotó erõkkel párhuzamos vektorok metszik egymást. Pl. az F1, F2 és K2 által alkotott háromszögnek a vektorsokszög b sarokpontja felel meg.

3./ A vektorpoligonban két vektorsugár és egy erõ vektora háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a kötélsokszögben egy pont felel meg, melyben a két vektorsugárral párhuzamos két kötéloldal az erõ hatásvonalán metszõdik.

Az erõrendszer eredõjének szempontjából a következõ három esetet különböztetjük meg:

1./ Az erõvel egyenértékû erõrendszer vektorsokszöge is és kötélsokszöge is és kötélsokszöge is nyitott (az elsõ és utolsó kötéloldal metszödik).

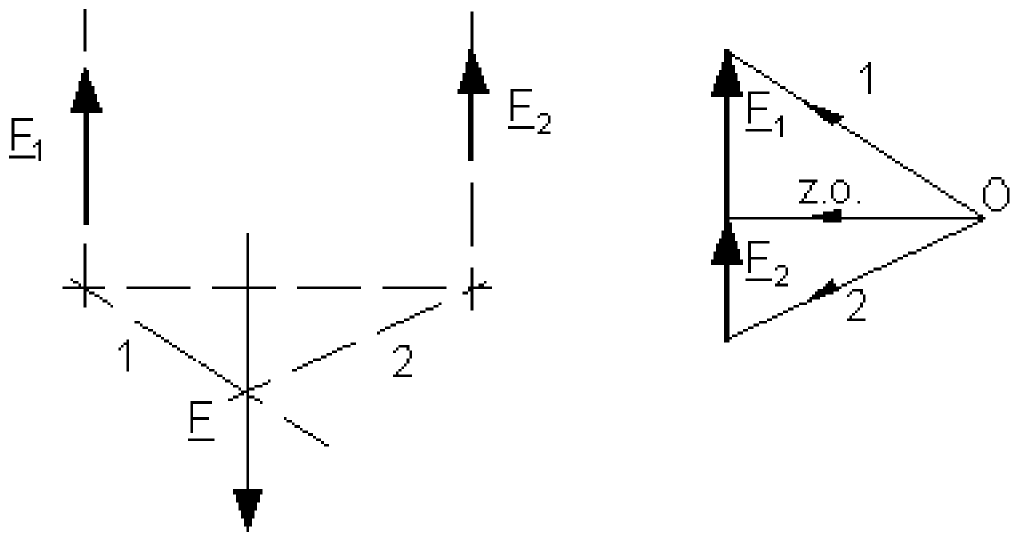
2./ Az erõpárral egyenértékû erõrendszer vektorsokszöge zárt, kötélsokszöge nyitott (az elsõ és az utolsó kötéloldal párhuzamos).

3./ Egyensúlyi erõrendszer esetén a vektorpoligon is és a kötélpoligon is zárt (az elsõ és az utolsó kötéloldal egy egyenesbe esik).

Egy adott erõrendszerrel egyensúlyt tartó erõk meghatározása kötélsokszög segítségével

1./ Párhuzamos erõkbõl álló erõrendszer esetén

Adott egy erõ vektora (F) és két, vele párhuzamos erõ hatásvonala. Szerkesszük meg a két adott hatásvonalon mûködõ erõket úgy, hogy a három erõ egyensúlyi erõrendszert alkosson!

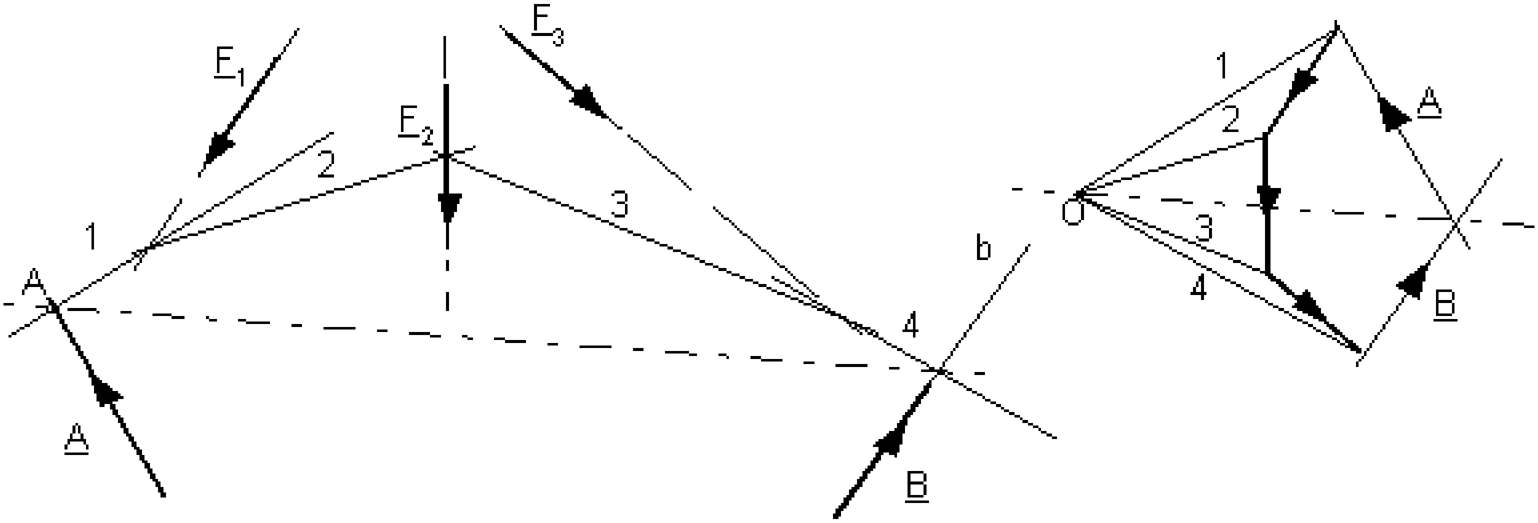


49. ábra

Az adott erõre rajzolt kötélsokszög két oldalát metszésbe hozzuk az adott hatásvonalakkal. A kapott metszéspontok a záróoldalt adják: ez megelõzi az elsõ, ill. követi az utolsó, jelen esetben a harmadik erõt. A vektorpoligonban a záróoldallal húzott párhuzamos az adott erõ egyenesén megadja a keresett két erõt.

2./ Síkban szétszórt erõrendszer esetén

Adott F1, F2, F3 síkbeli erõrendszer. Határozzuk meg azt a P ponton átmenõ, ismeretlen irányú és nagyságú A erõt, valamint azt a b egyenesbe esõ B erõt, amelyek a három erõvel egyensúlyt tartanak.



50. ábra

A szerkesztés azon alapszik, hogy egyensúly esetén a vektorpoligon is és a kötélpoligon is zárt. A kötélsokszög elsõ oldalát az A erõ hatásvonalának egyetlen ismert PA pontján át kell rajzolni. A megszerkesztett kötélpoligon a b egyenest PB pontban metszi. A záróoldal tehát PA PB egyenes lesz. A vektorpoligon záródását úgy érhetjük el, hogy a b-vel húzott párhuzamost elmetszük az O pólusból húzott záróoldallal párhuzamos egyenessel. A kapott metszéspont a B végpontja és az A kezdõpontja. Az A végpontja természetesen az F1 kezdõpontja.

1.12 A súlypont meghatározása:

1. A súlypont fogalma

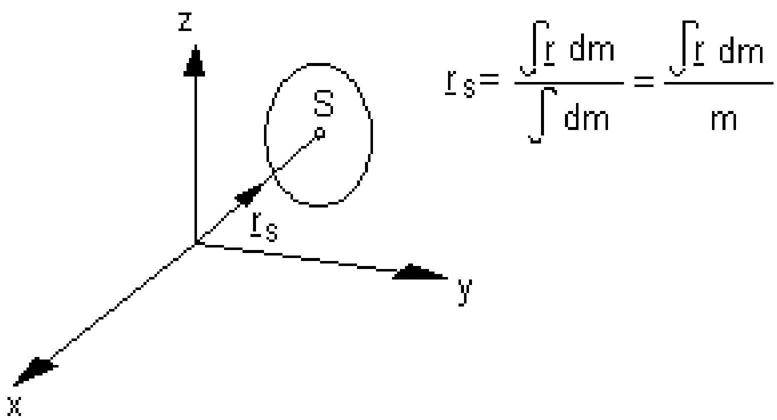
2. Helyvektorának meghatározása

3. Vonalak, síkidomok, homogén testek súlypontjának kiszámítása

1. A súlypont fogalma

A Földön lévõ valamennyi testre a Föld vonzásából és forgásából származó erõ hat. Mivel ez a hatás a test minden elemére kiterjed, így egy térben megoszló erõrendszert alkot, amely-a Föld középpontjának nagy távolsága miatt-párhuzamos, függõleges irányú elemi erõkbõl áll. Ennek a párhuzamos erõrendszernek az eredõje a test súlya. A súlyerõrendszer középpontja, az eredõ támadáspontja a súlypont.

2. A súlypont számítása



51. ábra

A súlypont helyvektora:

$$\underline{r}_s = \frac{\int \underline{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \underline{r}\, dm}{m}$$

ahol: m a test tömege, r a dm tömegelem helye.

a./ Ha homogén tömegeloszlású testrõl van szó (r=áll.) akkor a súlypont helye a test geometriai alakjából adódik,

ugyanis dm = r dV, így:

$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \underline{r}\ \rho\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int \underline{r}\ dV}{\int dV} = \frac{\sum \underline{r}_i\, V_i}{\sum V_i}$$

Az így kapott pontot helyesebb volna geometriai középpontnak tekinteni, mivel térfogatra vonatkozik, és csak testek esetén indokolt a súlypont elnevezés.

A súlypont koordinátái az adott térfogathoz kötött koordinátarendszerben:

$$x_S = \frac{\int x\, dV}{\int dV} = \frac{\sum x_i\, V_i}{\sum V_i}$$

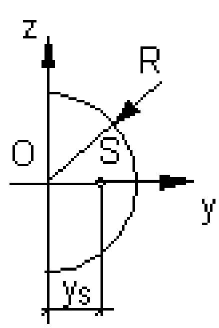
$$y_S = \frac{\int y\, dV}{\int dV} = \frac{\sum y_i\, V_i}{\sum V_i}$$

$$z_S = \frac{\int z\, dV}{\int dV} = \frac{\sum z_i\, V_i}{\sum V_i}$$

A test szimmetriasíkjai mindig átmennek a súlyponton. Néhány homogén test súlypontja:

- Gúla vagy kúp: az alaptól számított negyedmagasságban levõ és az alappal párhuzamos síkmetszet súlypontjával esik egybe.Természetesen rajta van a test súlyvonalán, vagyis az alapterület súlypontjának és a gúla ill. kúp csúcsának összekötõ egyenesén.

- Félgömb:



$y_S = 3R/8$

52. ábra

b./ Síkidomok súlypontja

A súlypont helyvektora:

$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dA}{\int dA} = \frac{\sum \underline{r}_i A_i}{\sum A_i}$$

A súlypont koordinátái a síkidomhoz kötött koordinátarend-

szerben:

$$x_S = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$y_S = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

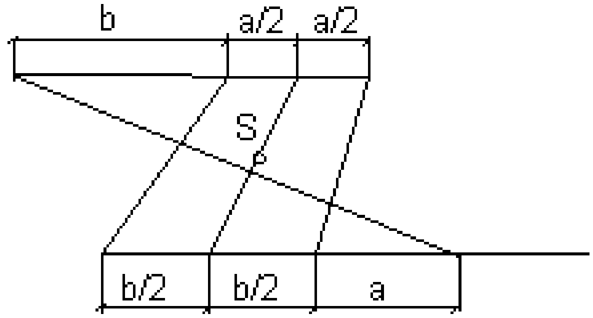
$$z_S = \frac{\int z\, dA}{\int dA} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$$

A síkidom szimmetriatengelyei mindig átmennek a súlyponton. Néhány síkidom súlypontja:

- Háromszög: az oldalfelezõk metszéspontja, ill. a magasság harmada (az alaptól).

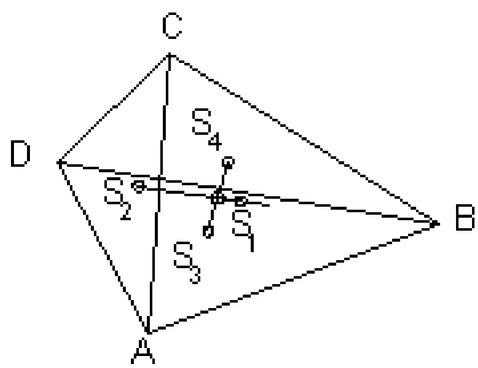
- Négyszög: az AC átló berajzolásával nyert két háromszög súlypontja S1 és S2, a BD átló behúzásával nyert két háromszögé S3 és S4. Az S1S2 és S3S4 egyenesek súlyvonalak, így metszéspontjuk a négyszög súlypontját adja.

- Trapéz:



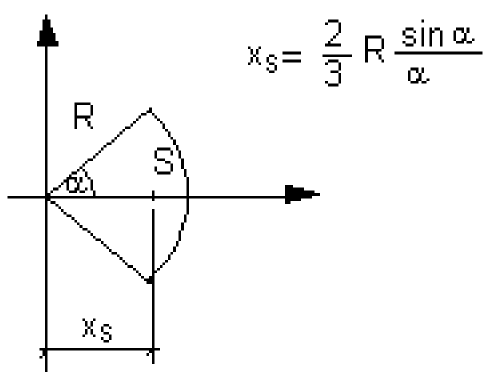
53. ábra

- Sokszög: a legegyszerûbben háromszögekre bontással határozható meg.



54. ábra

- Körcikk: a szögfelezõ sugáron van.



55. ábra

Félkörlap esetén:

xs = 4R / (3p)

c./ Vonalak súlypontja

A súlypont helyvektora:

$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dl}{\int dl} = \frac{\sum \underline{r}_i l_i}{\sum l_i}$$

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\int x\, dl}{\int dl} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}$$

$$y_S = \frac{\int y\, dl}{\int dl} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}$$

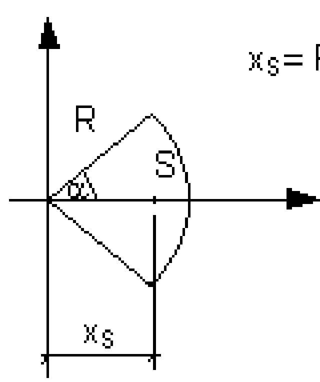
$$z_S = \frac{\int z\, dl}{\int dl} = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}$$

Néhány vonal súlypontja:

- Egyenes vonaldarab: a felezõpontban van.

- Körív: a szögfelezõ sugáron van.

$$x_S = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



56. ábra

Félkörív esetén: xs = 2R / p.

Az egyszerû részekbõl összetett homogén test, síkidom, törtvonal súlypontjának kiszámítási menete:

1. Célszerûen választott koordinátarendszer felvétele

2. Az összetett test, síkidom, törtvonal felbontása egyszerû részekre

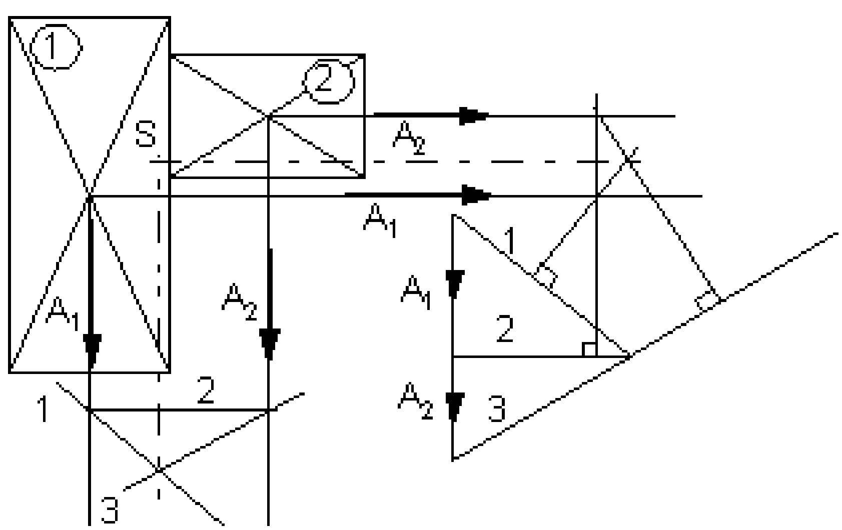
3. A részek súlypontjainak meghatározása

4. Behelyettesítés a megfelelõ képletbe

6. A kapott súlypont berajzolása az ábrába

3. Síkidom súlypontjának szerkesztése

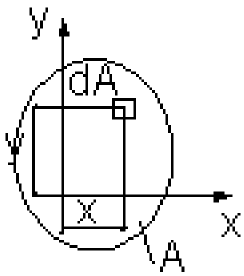
A síkidomot olyan részekre bontjuk, hogy az egyes részek területének nagysága és súlypontjának helye egyszerûen adódjék. Az egyes súlypontokban a területekkel arányos párhuzamos erõket veszünk fel. Ezek megszerkesztett eredõjének hatásvonala súlyvonal. Majd az erõrendszert elforgatjuk-célszerû 90º-kal-, és ismét megállapítjuk az eredõt. A két eredõ metszéspontja a párhuzamos erõk középpontja, ill. két súlyvonal metszéspontjaként a súlypontot adja. A 90º-kal való elforgatás azért célszerû, mert így a két kötélsokszög számára csak egy vektorpoligont kell rajzolni. Az egyik kötélpoligon oldalai párhuzamosak a megfelelõ vektorsugarakkal, a másikéi erre merõlegesek.



57. ábra

4. Az elsõrendõ, vagy statikai nyomaték

A súlypont koordinátáit meghatározó képletek számlálói a geometriai testek, síkidomok, vonalak ún. elsõrendû vagy statikai nyomatékai. Ezekben az elemi térfogat, felület, vonaldarab egy távolsággal való szorzata, ill. annak integrálja szerepel. A távolságot képezhetjük egy tengelytõl vagy egy síktól, így beszélhetünk síkra vagy tengelyre vett statikai nyomatékról. A különbözõ elsõrendû nyomatékok közül jelentõsége a síkidom statikai nyomatékának van. Ennek meghatározása:



$$S_x = \int y \, dA \qquad [mł]$$

$$S_y = \int x \, dA \qquad [mł]$$

58. ábra

Az egyes x és y hosszak, tehát az x ill. y is elõjeles mennyiségek, így a statikai nyomaték lehet pozitív vagy negatív.

Összefoglalva: Valamely síkidomnak egy tengelyre számított statikai nyomatékán a síkidom területének és a súlypont tengelytõl mért távolságának szorzatát értjük. Egy síkidom tetszõleges tengelyre vett statikai nyomatékát úgy is meghatározhatjuk, hogy a síkidomot részekre bontjuk, majd a síkidom részeknek az adott tengelyre vett nyomatékát algebrailag összegezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha

$$\int x \, dA = 0$$

akkor x = 0, a súlypont tehát az y tengelyen fekszik. A síkidom súlypontján átmenõ egyenesre, vagyis a súlyvonalra számított statikai nyomaték mindig zérus.

1.14 A súrlódás jelenségének vizsgálata

1. Alapfogalmak, összefüggések

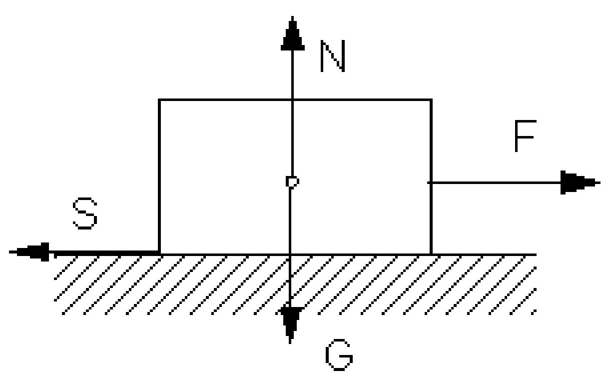
2. A súrlódás kúpjának megszerkesztése Gördülïellenállás.

Kötélsúrlódás.

1. A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódás

A kényszerek tárgyalásánál az egymással érintkezõ testek felszínét teljesen simának tekintettük. Ennek megfelelõen a megtámasztásnál a tökéletesen sima felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Az érintõsíkban nincs kölcsönhatás. A feltevést azonban csak közelítõen tudjuk megvalósítani, mert a valóságban a testek felszíne kisebb-nagyobb mértékben mindig érdes. A felszínek ilyen fizikai állapota miatt az egymással érintkezï testek az érintõsík irányába esõ elmozdulással szemben is ellenállást fejtenek ki. Ez a jelenség a súrlódás.

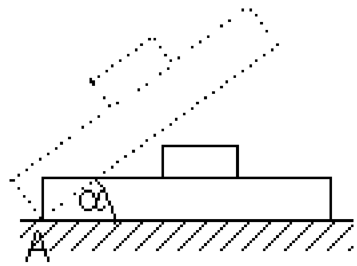
Ha a vízszintes síkra helyezett testre csak G súlyerõ hat, a test egyensúlyban marad, akár érdes a test, akár sima. Ha a súlyerõn kívül egy vízszintes F erõ is hat, akkor az tökéletesen sima érintkezési felszínek esetén elmozdítaná a testet. A valóságban - az érintkezõ felszínek érdessége miatt-az F erõ hatására fellépõ súrlódás miatt a test egyensúlyban maradhat.



59. ábra

Nem "nagy" F erõ esetén a testet a nyugvásbeli súrlódóerõ tartja egyensúlyban (S=F). Ha F nagyobb a lehetséges súrlódó erõnél, a test mozgásnak indul. A mozgás folyamán lép fel a mozgásbeli súrlódás.. Azaz beszélhetünk nyugvásbeli és mozgásbeli súrlódásról.Ha a két érintkezõ felület pontjai egymáshoz képest nem mozdulnak el, akkor nyugvásbeli súrlódásról van szó, ha elmozdulnak egymáshoz képest, akkor mozgásbeli súrlódásról beszélünk.

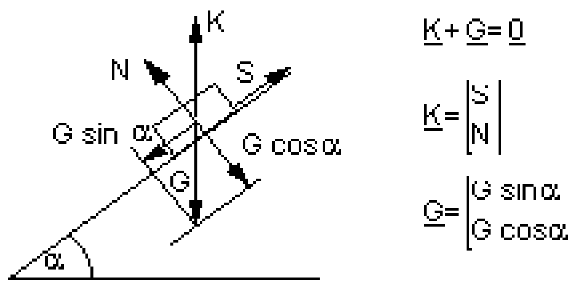
Az összefüggések tisztázására végezzünk egy egyszerû kisérletet. A vízszintes alapon nyugvó síklemez középére merev testet helyezzünk. Ezután a lemezt A pontja körül fokozatosan emeljük.



60. ábra

A test a lemezen egy darabig a lemez dõlése ellenére nyugalomban marad. Ha azonban a lemez a hajlásszöge egy meghatározott r értéknél nagyobb, a test a lemez alkotta lejtõn megindul, és lecsúszik. (Ha a lemezre egy másik merev testet helyezünk, akkor a r határérték általában megváltozik.)

Rajzoljuk meg a lejtõt a < r helyzetben, amikor a G súlyú test még nem csúszik le a lejtõn, tehát még egyensúlyban van.



61. ábra

A testre ható egyensúlyi erõrendszer a G súlyerõbõl és a vele közös hatásvonalú, egyezõ nagyságú, ellentétes értelmû K erõbõl áll. A K kényszererõ lejtõirányú koordinátáját S-sel (súrlódóerõ), normális irányú koordinátáját pedig N-nel jelöljük.

Az egyensúlyi egyenleteket a lejtõ és a normálisa irányába írjuk fel:

S - G sin a = 0 => S = G sin a

N - G cos a = 0 => N = G cos a

a két egyenletbõl: S = N tg a.

Egyensúly addig van, amíg a lejtõ hajlásszöge nem lépi túl a r határértéket, azaz a<r .A testet a lejtõ irányában egyensúlyban a súrlódóerõ tartja. Értéke a lejtõ hajlásszögével emelkedik, de csak az N tgr értékig, mert amint a lejtõ hajlásszöge a r határértéket átlépi, a test mozgásnak indul.

Összefoglalva:A test nyugalmi helyzetében is ébred súrlódás, az ún. nyugvásbeli súrlódás. Ilyenkor a súrlódó erõ nagysága éppen akkora, amekkora az egyensúly biztosításához szükséges, de nem lehet egy meghatározott értéknél nagyobb: S < N·tgr ahol: tgr = S / N = m a nyugvásbeli súrlódás tényezõje. A r szög a felületek érdességére jellemzõ. Meghatározása az elõbb említett lejtõkísérlettel történik. A lejtõ hajlásszögét addig növeljük, amíg a ráhelyezett test épp az elmozdulás határhelyzetébe kerül. Így: S < m N

A súrlódóerõ ilyen módon való számolása Coulomb-tól származik. Ebben az értelemben szokás Coulomb-féle súrlódásról beszélni.

A mozgásbeli súrlódás

Ha a lejtõ hajlásszöge túllépi a r határt, a test a lejtõn lecsúszik. Az ilyenkor fellépõ mozgásbeli súrlódóerõ a két test relatív sebességével ellentétes értelmû. Nagysága függ a normális erõtõl, a felületek fizikai állapotától, a mozgás sebességétõl. (Ha két száraz -kenés nélküli-érdes felület mozog egymáson, akkor a sebességtõl független súrlódóerõvel számolhatunk.)

Ebben az esetben a kényszererï két komponense közötti összefüggés: S = m N ahol: m a mozgásbeli súrlódási tényezõ.

A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódás összehasonlítása

- A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódási tényezõ általában nem egyenlõ egymással. Rendszerint: m < m0 , vagyis a szokásos anyagú testeknél azonos N esetén a mozgásbeli súrlódóerõ általában kisebb, mint a nyugvásbeli súrlódóerõ volt.

- A nyugvásbeli súrlódás értékét egyenlõtlenség, a mozgásbeli súrlódásét egyenlõség fejezi ki.

- A nyugvásbeli súrlódásra az egyensúly fenntartása érdekében van szükség, míg a mozgásbeli súrlódást a mozgás hozza létre.(A nyugvásbeli súrlódást az érintõsíkba esõ erõ ébreszti.)

A valóságban amikor üzemszer_ körülmények között mozognak felületek egymáson, a súrlódást kétféleképpen szokás modellezni:

- Coulomb-féle súrlódással, amikor feltételezzük, hogy az érintkezï felületek szárazak, közöttük folyadék vagy más kenõanyag nincs.

- Folyadéksúrlódással, amikor a két felület közötti részeket valamilyen folyadék, kenõanyag tölti ki.

Ilyenkor a felületek relatív mozgásánál a folyadéknak jelentõs szerepe van.

A valóságos esetek tulajdonképpen mindkét modellt magukban foglalják úgy, hogy nyugvó súrlódás esetén a felületeket összenyomó erõ mintegy kipréseli a folyadékot, és ezért inkább a száraz súrlódás esete valósul meg. Mozgás esetén a mozgó felület "úszik" a folyadékfilmen, ezáltal a súrlódóerõ kisebb lesz. Mindez indokolja, hogy m < m0.

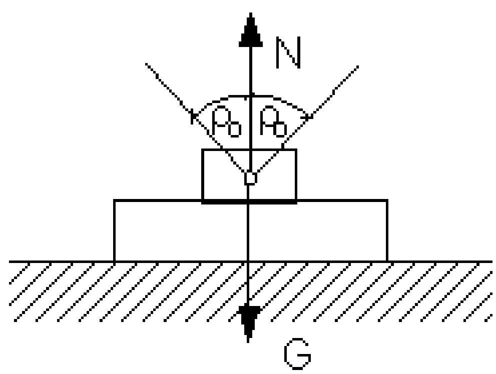
2. A súrlódás vizsgálata szerkesztéssel

A felület érdességét a számító eljárásokban a m ill. a m0 tényezõvel jellemezzük, a szerkesztõ eljárásokban pedig a súrlódás kúpjával, amelynek félcsúcsszöge r0:

- Nyugvásbeli súrlódás esetén egyensúly csak akkor lehetséges, ha a kényszererõ az érintkezés normálisa körül 2r0 csúcsszöggel szerkesztett súrlódási kúp palástján belül marad (S < N tgr0).

- Az elmozdulás határhelyzetében a kényszererõ a kúp palástjára illeszkedik, azaz valamelyik alkotóval esik egybe (S = N tgr0).

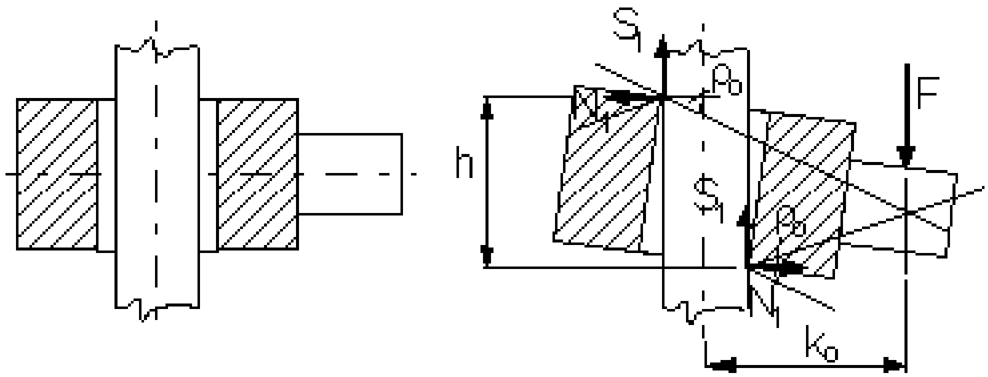
- Mozgásbeli súrlódás esetén a reakció mindig egybeesik a súrlódási kúp palástjának valamely alkotójával (S = N tgr).



62. ábra

Az önzárás feltétele

Megállapítandó, hogy a rajzolt szerkezet milyen k = k0 karhosszúság mellett lesz önzáró. Önzárás esetén a k0 vagy annál nagyobb karon bármekkora erõ mûködhet, a bilincs nem mozdul el.



63. ábra

a./ Megoldás szerkesztéssel: a bilincs lefelé akar elcsúszni, a súrlódóerõ iránya csak a rajzolt lehet. Az elmozdulás határhelyzete miatt a reakciók a szélsõ alkotókkal esnek egybe. Az F erõ hatásvonala át kell menjen a kényszererõk hatásvonalainak metszéspontján. Ebbõl a feltételbõl a k0 kar hossza meghatározható.

b./ Megoldás számítással:

N1 - N2 = 0 => N1 = N2 => S1 = S2 = m0 N

m0 N1 + m0 N2 - F = 0 (2)

Szumma Mi(A) = m0 N2 d + N2 h - (k0 + d / 2) F = 0 (3)

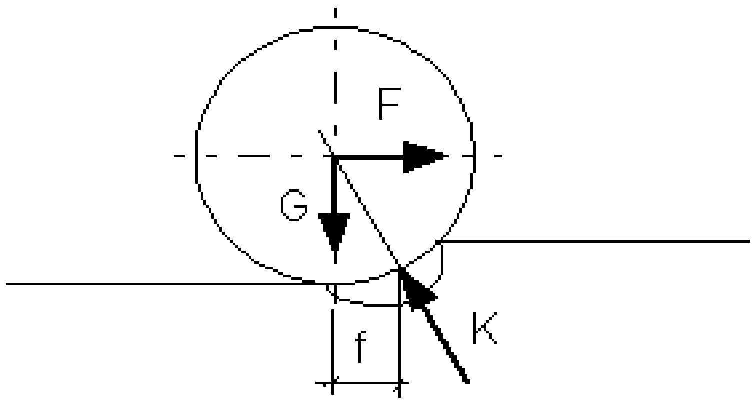
(2)-bõl F = 2 m0 N

(3)-ba beírva a kapott összefüggéseket, és N-nel egyszerûsítve:

m0 d + h - 2 m0 k0 - 3 m0 d / 2 = 0 => h - 2 m0 k0 = 0 => k0 = 0.5 h / m0.

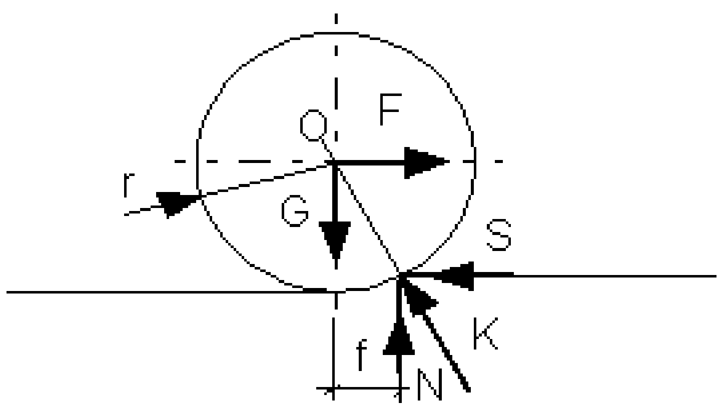
3. Gördülõellenállás

Vizsgáljunk egy gördülõ kereket. Bármely forgástestnek sík felületen való gördüléséhez szükséges követelmény az, hogy ébredjen súrlódás, ill. súrlódóerõ a test és a sík között. A gördülõ kerék bizonyos mértékig belapul és benyomódik az érintkezõ felületbe. Így az elméletileg keletkezõ koncentrált reakcióerõ helyett egy megoszló reakció-erõrendszer keletkezik, amelynek eredõje f távolsággal eltolódik a haladás irányába a kerék középvonalához képest. Ez az f a gördülõ ellenállás karja [m]. Értéke kísérletileg állapítható meg.



64. ábra

Ismert G és F erõ. Határozzuk meg a gördülïellenállás karját!



65. ábra

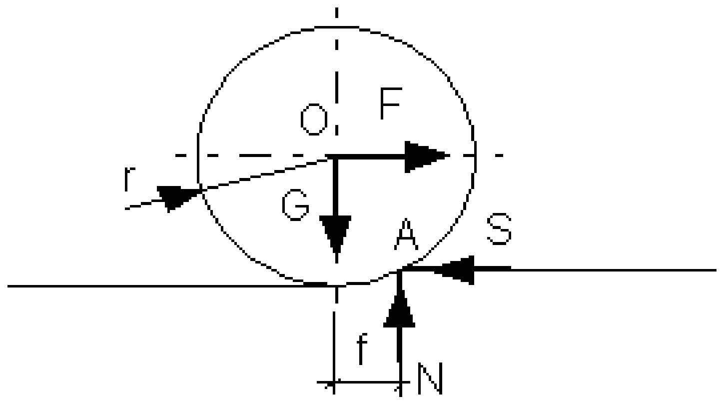
G + F + K = 0

N - G = 0

F - S = 0

N f-S r = 0 => f = S r / N elmozdulás határhelyzetében

Összefoglalva: gördüléskor a testek deformációjának következtében a mozgással szemben fellép egy ellenállás, az ún. gördülïellenállás. A kerék gördítéséhez a tengelyen F vízszintes erõt alkalmazunk:



66. ábra

Az elmozdulás határán:

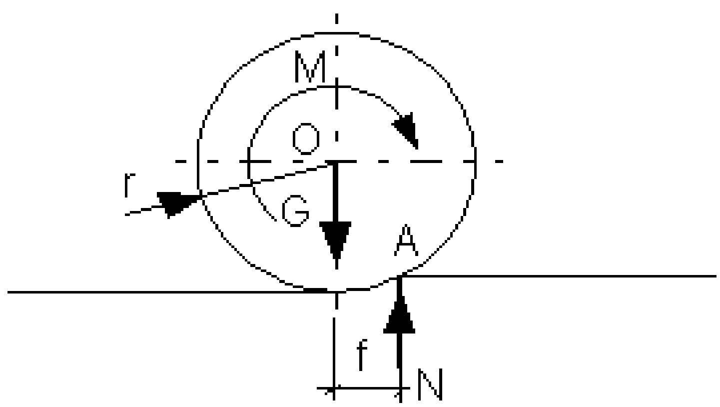
G f - F r = 0 = S M(A)

innen:

F = G f / F

az a legnagyobb erõ, amelynek hatására a kerék még éppen nyugalomban marad. Nagyobb sugár esetén kisebb a gördítéshez szükséges F erõ.

A kerék egyenletes gördüléséhez M nyomatékú erõpárt alkalmazunk:



67. ábra

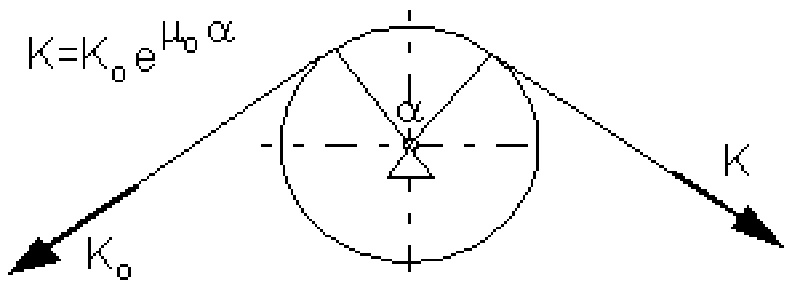
M = f N

A nyugalom feltétele:

N f ³ M

4. A kötélsúrlódás

Egy kötél a középponti szögnek megfelelõ íven nyugszik érdes hengerfelületre hajlítva. Teljesen sima hengerfelszín esetén a kötél a nagyobb erõ irányába megcsúszik. Érdes felszínnél viszont a henger és a ráfeszülõ kötél között súrlódóerõk ébrednek, amelyek a mozgást gátolják, esetleg meg is akadályozzák. Az elmozdulás határán, az egyensúly határhelyzetében a kötél két ágában ható erõk közötti összefüggés:



68. ábra

ahol

m : a súrlódási tényezõ a kötél és a henger között

a : a felfekvõ kötélkerület középponti szöge [rad].

8. Igénybevételek

8.1. A feszültség fogalma

A tartókra ható erõket két csoportra bonthatjuk. A szerkezet önsúlya, a külsõ hatásokból származó erõk, azaz a terhelés, valamint a reakciók alkotják a külsõ erõket, ill erõrendszert, amely egyensúlyi, azaz:

$S\ \underline{F} = \underline{0}$ és $S\ (\underline{r}\ x\ \underline{F}) + S\ \underline{M} = \underline{0}$

Beszélhetünk belsõ erõkrõl is, amelyeket akkor kapunk meg, amikor a tartót valamelyik keresztmetszete mentén gondolatban kettévágjuk. Az elvágott keresztmetszetben egy felület mentén megoszló erõrendszer mûködik - amely a másik tartórész hatásának a következménye - , ami biztosítja a tartórész egyensúlyát. Ennek a keresztmetszet felületén megoszló belsõ erõrendszernek a fajlagos értéke, az erõintenzitás-vektora a feszültség, amely tehát a keresztmetszet $1\ m^2$-ére ható belsõ erõ: $\underline{\rho}$ $[N/m^2]$. Ennek eredõjét a keresztmetszet súlypontjában igénybevételnek nevezzük. A tartók méretezésénél mindig az igénybevételek meghatározására törekszünk.

8.2. Az igénybevétel definíciója és meghatározása

Keressük egy rúd alakú tartó egyik kijelölt keresztmetszetének az igénybevételét. Evégbõl a rudat az eddigiek szerint a vizsgálandó keresztmetszet mentén két részre vágottnak képzeljük.

Az elhagyott bal oldali rúdrészre ható erõrendszernek a megmaradó rúd elvágott keresztmetszetének súlypontjába redukált vektorkettõse:$[\underline{F};\underline{Ms}]$.Ha pedig a jobb oldali erõrendszert redukáljuk az S pontba, akkor a kapott $[\underline{F'};\underline{Ms'}]$ -re fennáll a hatás-ellenhatás törvényénél fogva: $\underline{F} = \underline{F'}$ és $\underline{M} = \underline{M'}$. Ezt az $\underline{F}(\underline{F'})$ eredõ erõt és az $\underline{M}(\underline{M'})$ nyomatékú erõp&aacu keresztmetszet igénybevételének.

Általában tehát: Egy keresztmetszet igénybevételén a keresztmetszet egyik oldalán lévõ erõrendszernek a keresztmetszet súlypontjába való redukáltját értjük. (Ez egyenértékû a keresztmetszet mentén mûködõ belsõ, megoszló erõrendszernek a keresztmetszet súlypontjába számított eredõjével.)

8.3. Az igénybevétel fajtái

Bontsuk fel az $\underline{F}$ és $\underline{Ms}$ vektorokat a koordinátatengelyek szerinti összetevõkre (vagyis a keresztmetszet síkjába esõ és arra merõleges komponensekre):

$\underline{F} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ és $\underline{M} = Mx\ \underline{i} + My\ \underline{j} + Mz\ \underline{k}$

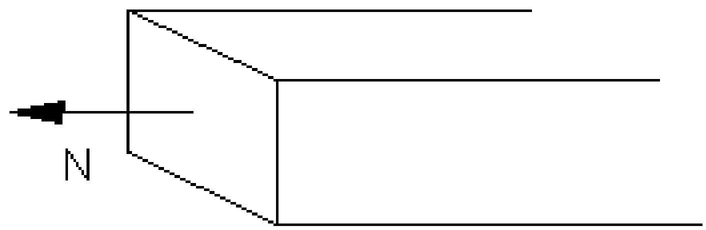
Az erõrendszer redukáltját tehát hat tényezõ jellemzi. Ebbõl három egy-egy erõ, melynek közös támadáspontja a keresztmetszet súlypontja, hatásvonaluk pedig azonos a felvett koordinátatengelyekkel.

A másik három egy-egy erõpár, melyek az x, y és z tengely körül forgatnak.

Ha az összetevõk közül csak egy nem zérus, akkor alapigénybevételrõl beszélünk.

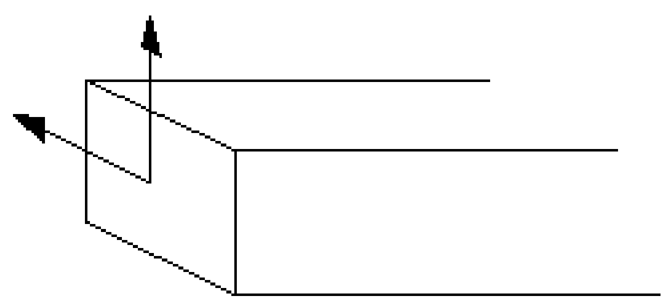
Alapigénybevételek:

1. Ha csak az X ≠ 0, azaz az erõ a keresztmetszet síkjára merõleges, akkor az igénybevétel húzás, ill. nyomás (X ≡ N).



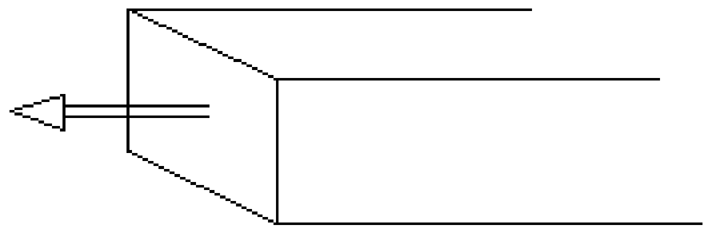
96.. ábra

2. Ha csak az Y≠0, vagy csak Z≠0, vagy egyik sem zérus, vagyis az eredõ a keresztmetszet síkjába esik, akkor az igénybevétel nyírás (Y ≡ V).



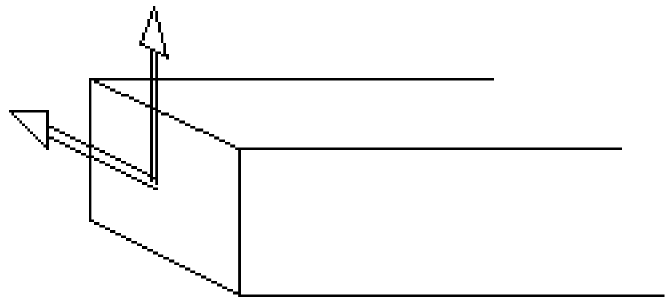
97. ábra

3. Ha csak az M ≠0, azaz az eredõ erõpár a keresztmetszet síkjára x merõleges tengely körül forgat, akkor az igénybevétel csavarás (M ≡ Mt).



98. ábra

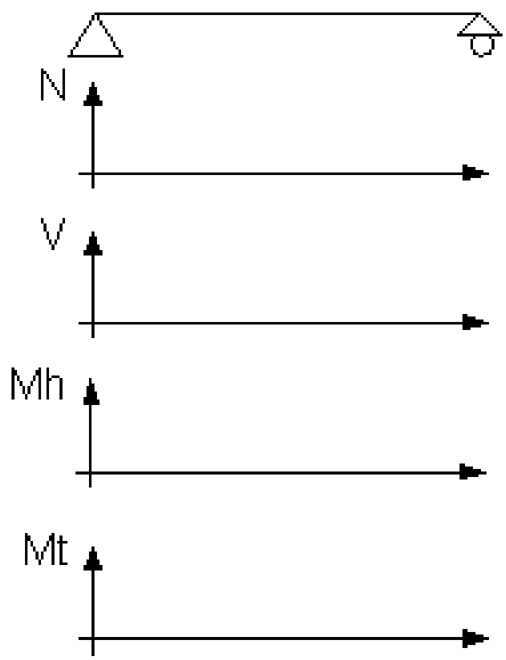
4. Ha csak My ≠0, vagy Mz ≠0, azaz az erõpár a keresztmetszet síkjába esõ tengely körül forgat, akkor az igénybevétel hajlítás (M ≡ Mh).



99. ábra

Az igénybevételi ábra

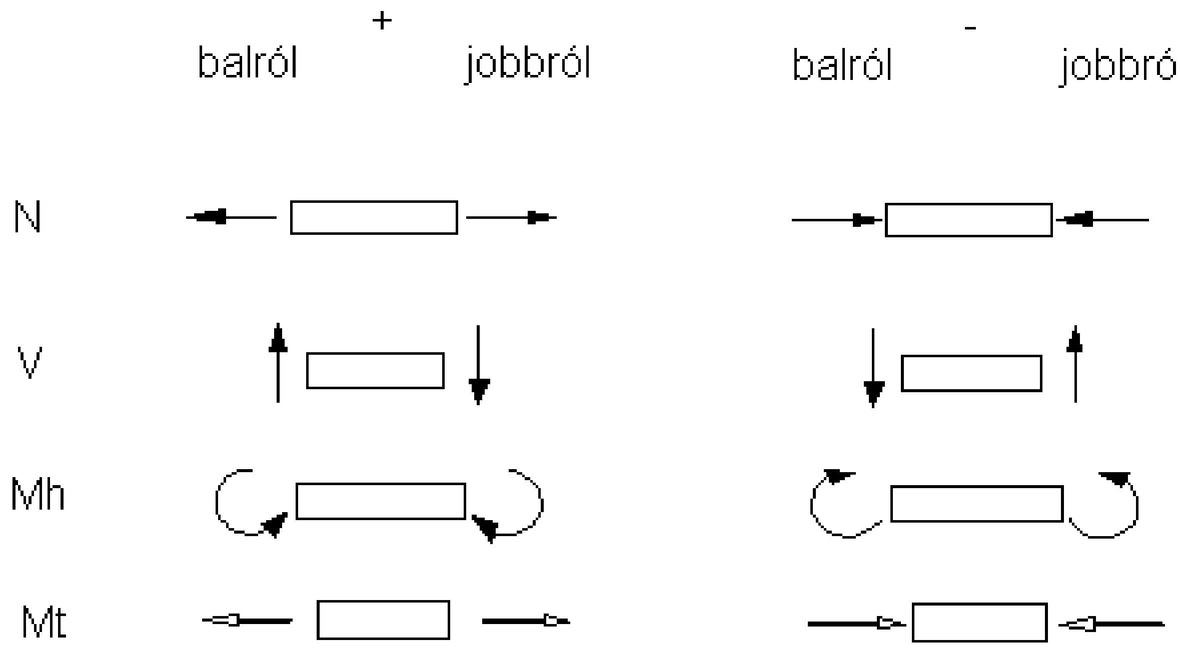
A tartó hossztengelye mentén ábrázolt alapigénybevételeket igénybevételi ábráknak nevezzük:



100. ábra

Elõjelszabály

Az igénybevételi ábrák rajzolásakor következetes elõjelszabályt kell betartanunk. Az elõjelnek függetlennek kell lennie attól, hogy az ábrák rajzolását balról vagy jobbról kezdjük. Az alkalmazott elõjelszabály:

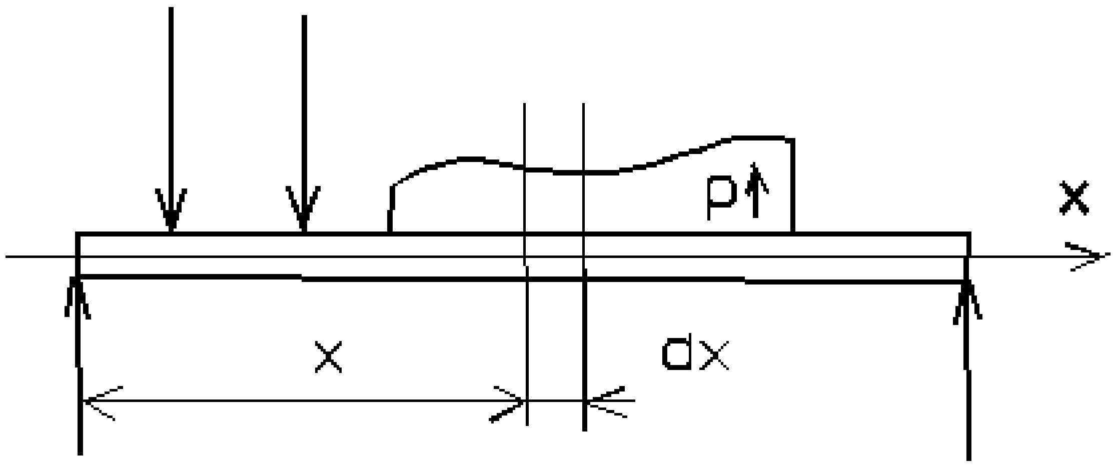


101. ábra

A pozitív elõjelû mennyiségeket mindig az adott igénybevételi ábra zérus vonala fölé mérjük, míg a negatívakat alá.

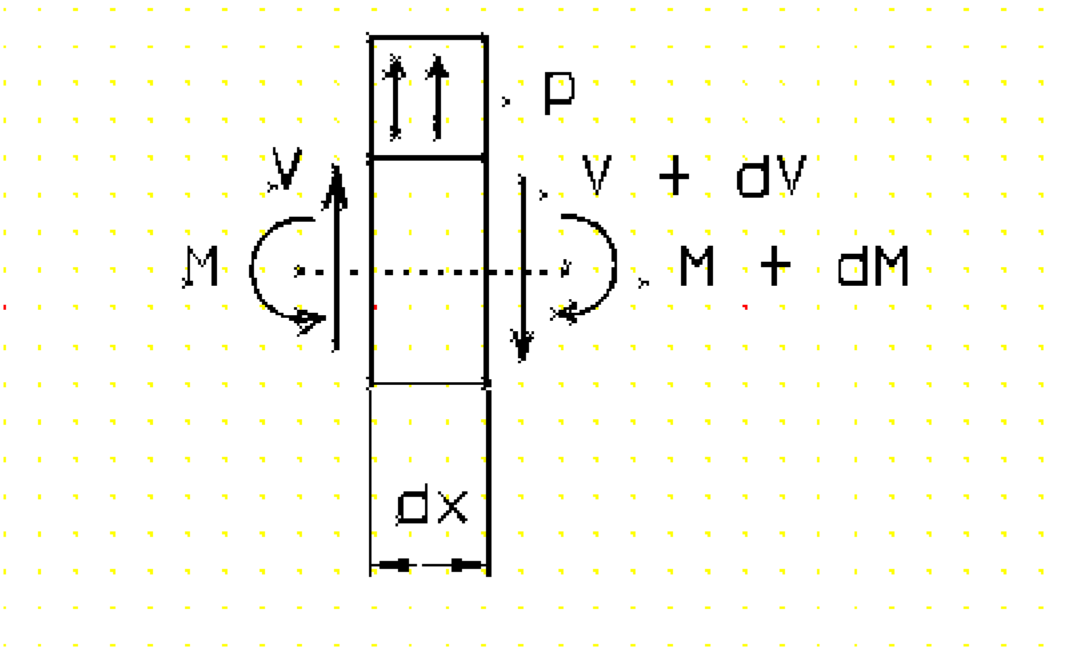
5. Összefüggés a terhelés és az igénybevételek között

Terhelje a rudat az xy sikban olyan egyensúlyi erõrendszer, mely a koncentrált és megoszló, aktiv és passziv, de a rúdra merõleges erõkbõl áll. (71. ábra)



71. ábra

A hajlitónyomaték és a nyiróerõ közötti analitikus összefüggés megállapitása végett képzeljünk a rúdból kivágva egy az x keresztmetszet után következõ dx darabot. (72. ábra)



72. ábra

Az elemi rúdrész bal oldali végét az $\underline{M}$ és $\underline{V}$ nyiróerõ terheli a balról elhagyott r&uacu az $\underline{M} + d\,\underline{M}$ hajlitónyomaték és a $V + dV$

nyiróerõ a jobb oldali elhagyott rúdrész hatásaképpen. Ezenkivül az elemi rúddarabot még a megoszló terhelés ráesõ pdx

$$\sum_{(S)} M_1 = 0 \quad \text{és} \quad \sum Y_1 = 0$$

A nyomatéki egyenletet az elemi rúdrész jobb oldali keresztmetszetének S pontján átmenõ és a rajz sikjára merõleges tengelyére irjuk fel

$$M - \left(M + fM\right) - V\,dx - p\,dx\frac{dx}{2} = 0$$

Az utolsó tagot mint másodrendû kicsi mennyiséget elhanyagolva:

$$\frac{dM}{dx} = -V$$

kapjuk, azaz: a nyiróerõ függvénye a hajlitónyomaték függvényének x szerinti elsõ differenciálhányadosának negativja.

A másik egyensúlyi egyenlet:

$$V + p\ dz - \left(V + dV\right) = 0 \quad \text{ebbõl} \quad \frac{dV}{dx} = p$$

azaz a nyiróerõ függvényének az x szerinti elsõ derviáltja a terhelés függvényét adja.

A két fenti összefüggésbõl:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p$$

<u>A terhelés és az igénybevételek közötti összefüggés integrál formában</u>:

A $\frac{dV}{dx} = p\left(x\right)$ összefüggést integrálva: $V = V_o + \int_o^x p\left(x\right)dx$

(ahol V_o a nyiróerõ kezdeti értéke) $\left(x = 0\right)$ adódik.

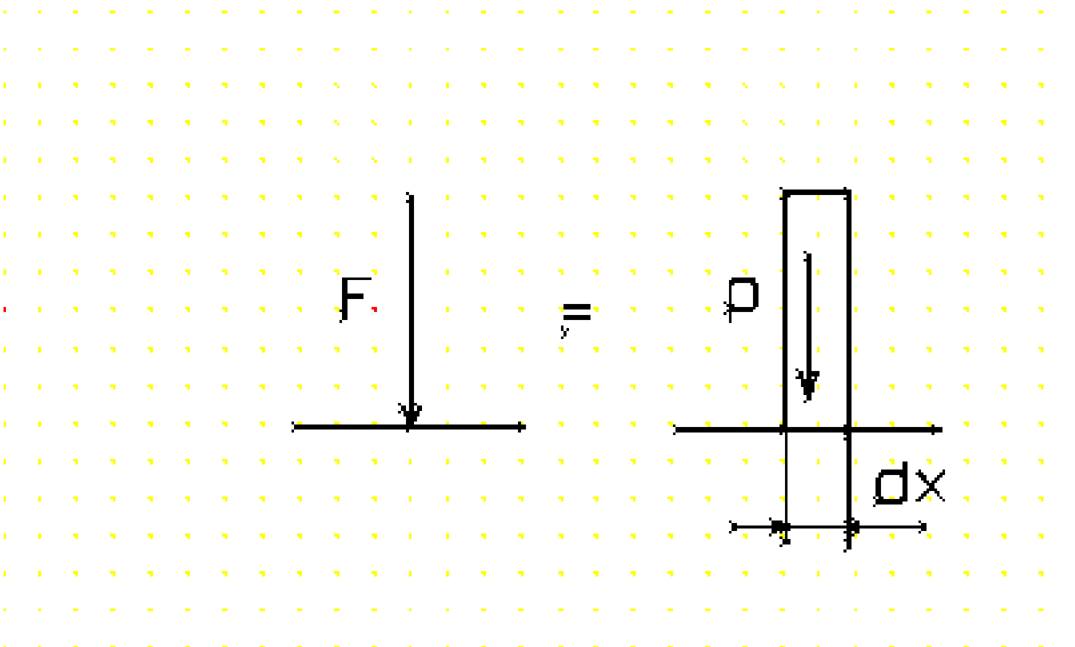
A $\frac{dM}{dx} = -V\left(x\right)$ összefüggést integrálva: $M = M_o - \int_o^x V\left(x\right)dx$

adódik, ahol M_o a hajlitónyomaték kezdeti értéke $\left(x = 0\right)$.

A fenti összefüggések az ún. Zsuravszkij tételek.

Mindezek alapján, ha az adott tartót terhelõ egyensúlyi erõrendszert ismerjük (a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletekbõl az ismeretlen reakcióerõket meghatároztuk), akkor a tartó terhelésének ismeretében integrálással megkaphatjuk a V nyiróerõ ábrát, és ebbõl - ugyancsak integrálással - a hajlitónyomatéki ábrát.

Az összefüggések megállapitásánál úgy mentünk át az x -hez tartozó $x + dx$ szo megoszló terhelés volt a tartón, vagyis koncentrált erõ helyén nem haladtunk át. Ennek megfelelõen a tartót terhelõ koncentrált erõt olyan - igen kis szakaszon megoszló - nagy intenzitású terhelésnek kell tekinteni, amelynek eredõje a koncentrált erõ. (73. ábra)



73. ábra

$$F = \lim_{\Delta x \to 0} p\Delta x$$

Ahol a tartón koncentrált erõ hat, ott a koncentrált erõ irányának megfelelõen - ha a tartón balról jobbra haladunk - felfelé mutatónál pozitiv, lefelé mutatónál negativ irányú szakadás keletkezik a nyiróerõ ábrában. Ennek a nagysága a koncentrált erõ értéke.

Ha a tartó valamely keresztmetszetében koncentrált erõpár mûködik, akkor ezen a helyen a nyomatéki ábrában szakadás keletkezik. A szakadás nagysága a koncentrált erõpár nyomatékának értéke. Pozitiv irányú az ugrás, ha - a tartón balról jobbra haladva - a koncentrált erõpár nyomatéka a megmaradó tartórészekre pozitiv.

A $p(x)$, $V(x)$ és $M(x)$ függvények közötti differenciális kapcsolat következményeit az I. táblá

I. táblázat

$p(x)$	$V(x)$	$M(x)$
0	0	állandó
	állandó $\neq 0$	lineáris
állandó	lineáris	másodfokú parabola
lineáris	másodfokú parabola	harmadfokú parabola
stb.		
A parabolák tengelye a rúdra merõleges irányú		

Ahol $\frac{dM(x)}{dx} = -V(x) = 0$, ott a hajlitónyomatéknak helyi szélsõértéke van. A maximális hajlitónyomaték - $M_{max} = \left| M_{max} \right|$

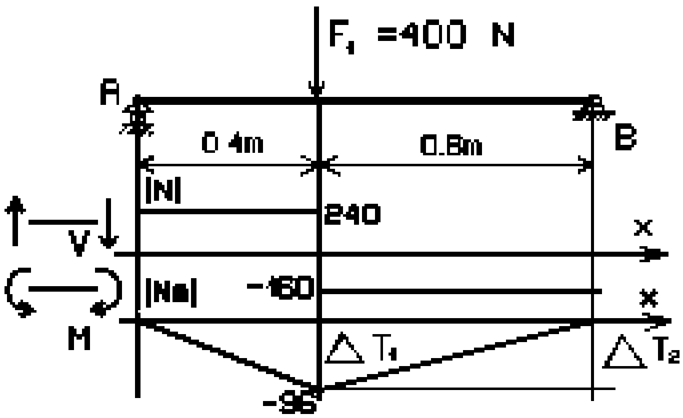
Az egyes ábraszakaszok illeszkedését a II. táblázatban foglaltuk össze:

II. táblázat

Terhelési ábra	V ábra	M ábra
p -ben szakadás	töréspont	közös érintõ
koncentrált erõ	szakadás	töréspont
koncentrált erõpár	közös érintõ	szakaszád

6. Tartók igénybevételi ábráinak és függvényeinek meghatározása koncentrált erõk és erõpárok eseténben

1.) Határozzuk meg a 74. ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit!



74. ábra

Elsõ lépésként határozzuk meg a tartót terhelõ egyensúlyi erõrendszert.

Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum Y_i = 0 \qquad A - F_1 - B = 0 \qquad A = 240\ N\uparrow$$

$$\rightarrow$$

$$\sum_{/B/} M_1 = 0 \qquad A \cdot 1 - 400 \cdot 0{,}6 = 0 \qquad B = 160\ N\uparrow$$

Mivel a tartón megoszló terhelés nem mûködik, csak koncentrált erõk hatnak, a nyiróerõábra állandó szakaszokból, a nyomatéki ábra egyenesekbõl fog állni.

Az igénybevételi ábrákban az $\underline{A}$, $\underline{F_1}$ *és* $\underline{B}$ erõk helyén lesz változás. Ezen helyeknek megfelelõ függõleges egyeneseket az igénybevételi ábrák megrajzolása elõtt már húzzuk meg, mert ezek "emlékeztetnek" a változásokra.

Második lépésként rajzoljuk meg a nyiróerõ ábrát. Az A keresztmetszettõl balra nyilvánvalóan zérus értékû a nyiróerõ. Az A keresztmetszetben A = 240 N nagyságú felfelé történõ ugrás következik. Ez lesz a nyiróerõ értéke egészen az F_1 er& $F_1 = 400\ N$ nagyságú negativ irányú ugrás következik, mert F_1 lefelé mutat. A nyiróerõ ú az érték nem változik a tartó végéig, ahol $B = 160\ N$

nagyságú pozitiv ugrással zérussá válik a nyiróerõ.

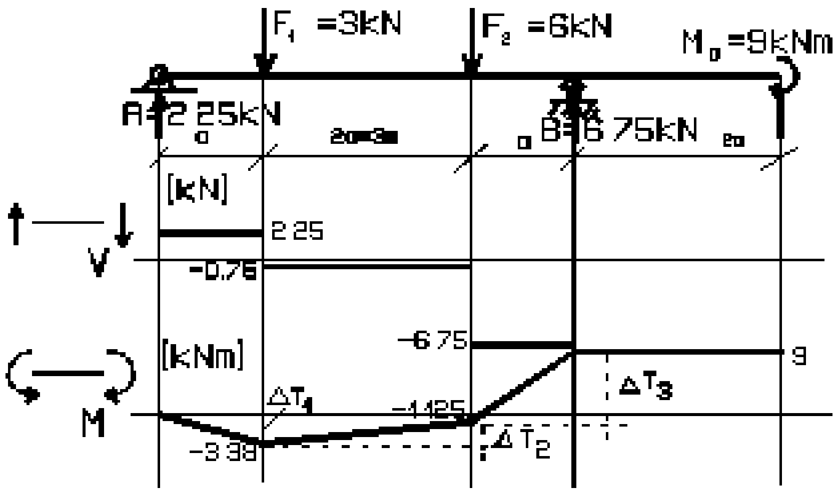
Harmadik lépés a nyomatéki ábra meghatározása. Tudjuk, hogy az A csuklóban a nyomaték zérus. Mivel az $A - F_1$ szakaszon a nyiróerõ állandó, a nyomatéki ábra egyenes. A nyomatéki ábra F_1 keresztmetszetbeli értékét úgy kaphatjuk meg, ha a nyiróerõ ábra $A - F_1$ szakasza alatti $\Delta T_1 = 240 \cdot 0{,}4 = 96\ Nm$ területnek megfelelõ értéket az A pontbeli nyomatékértékbõl (ez itt zérus) negativ irányban - mivel ΔT_1 0! -

lemérjük.

Az elõbb elmondottakból következik, hogy a nyomatéki ábra $F_1 - B$ szakasza is

egyenes. F_1 -beli értéket ismerjük. Ha meghatározzuk a B -beli értéket, az egyenes - két pontja ismeretében - megrajzolható. A B keresztmetszetbeli értéket úgy kapjuk, hogy az F_1 -beli értékhez pozitiv elõjelû értékkel hozzáadjuk.

$\Delta T_2 = -160 \cdot 0{,}6 = -96\ Nm$ értékét. (ΔT_2 0, ezért a változás pozitiv). Mivel B-ben a nyomaték zérusra adó ellenõrzésül is szolgál, hiszen elõre tudtuk, hogy a B csukóban nem léphet fel nyomaték.



75. ábra

2.) Határozzuk meg a 75. ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit!

Mivel a tartót terhelõ egyensúlyi erõrendszer koncentrált erõkbõl és erõpárból áll, a nyiróerõ ábra állandó szakaszokból, a nyomatéki ábra egyenesekbõl fog állni.

Az igénybevételi ábrákban a koncentrált erõk és az erõpár helyén lesz változás. Húzzuk meg ezeknek a helyeknek megfelelõ függõleges egyeneseket.

Második lépés a nyiróerõábra megrajzolása. Az A keresztmetszettõl balra nyilvánvalóan zérus értékû a nyiróerõ.

Az A keresztmetszetben $A = 2{,}25\ kN$ nagyságú felfelé történõ ugrás következik. Ez lesz a nyiróerõ értéke egészen az $F_1 = 3\ kN$ negativ irányú ugrás következik (F_1 lefelév mutat!).

A nyiróerõ új értéke $2{,}25 - 3 = 0{,}75\ kN.$

Ez az érték nem változik egészen az F_2 erõig, ahol $F_2 = 6\ kN$ nagyságú, negativ ugrás követ

$-0{,}75-6=6{,}75\ kN$. Ez az érték nem változik a B pontig, ahol $B=6{,}75\ kN$ pozitiv ugrással zérussá válik és a konzo végéig zérus értékû marad.

Harmadik lépés a hajlitó nyomatéki ábra meghatározása.

Tudjuk, hogy az A csuklóban a nyomaték zérus, és az $A-F_1$ szakasza alatti $\Delta T_1=2{,}25\cdot 1{,}5=3{,}375\ kN\cdot m$ területnek megfelelõ értéket az A pontbeli nyomatékértéktõl (ez itt zérus) negativ irányban - mivel ΔT_1 0! - lemérjük. szakaszbeli egyenes iránytangense más értékû. Az F_2 -beli értékhez pozitiv irányban hozzáadjuk ΔT_2 -t.

ΔT_2 - a nyiróerõábra F_1-F_2 szakasza alatti terület:

$$\Delta T_2=-0{,}75\cdot 3=-2{,}25\ kN\cdot m$$.

(Mivel ΔT_2 0 , pozitiv irányban kell ΔT_2 -t mérni!).

Hasonlóan rajzolható meg a nyomatéki ábra F_2-B -beli szakasza. Itt $\Delta T_3=-6{,}75\cdot 1{,}5=-10{,}125\ kN\cdot m$.

Ezt pozitiv irányban felmérve a nyomaték értéke:

$$-1{,}125+10{,}125=9\ kN\cdot m$$

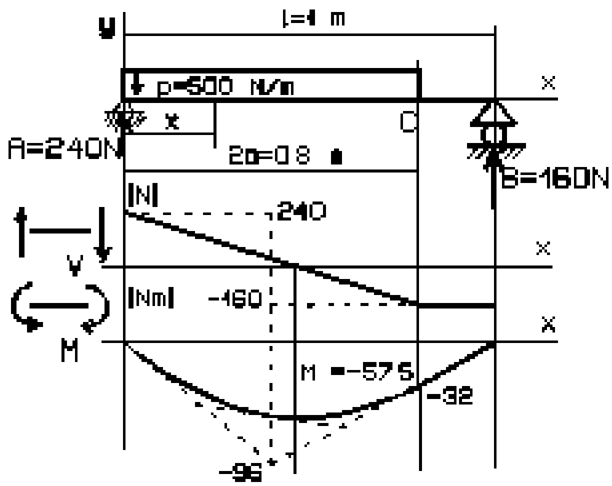
A konzolos szakaszon ez az érték állandó, mert a nyiróerõ zérus. A tartó végén M_O koncentrált erõpár hat. E negativ irányban kell mérni, mert a tartón balról jobbra továbbhaladva M_O - a tõle jobbra lévõ keresztmetszetekre negativ hajlitónyomatékot jelent. M_O -t lefelé mérve a nyomaték értéke zérussá válik, és mivel eljutottunk a tartó vég nyomaték zérus kell legyen - ez egyben ellenõrzésül is szolgált számitásaink helyességére.

7. Megoszló erõrendszerrel terhelt tartók igénybevételi ábráinak és függvényeinek

meghatározása

1.) Határozzuk meg a 76. ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit.

Tudjuk, hogy ahol a tartón állandó megoszló terhelés hat, ott a nyiróerõábra lineáris, a nyomatéki ábra parabolikus lesz. A zérus megoszló terhelésû szakaszon a nyiróerõábra állandó, a nyomatéki ábra lineáris. A két szakasz határán a nyiróerõábrában törés lesz, a nyomatéki ábra két szakaszának érintõje közös. Húzzuk be az elõbb emlitett keresztmetszeteknél az igénybevételi ábrákba a függõleges - emlékeztetõ - egyeneseket.



76. ábra

Rajzoljuk meg a nyiróerõábrát. A -tól balra a nyiróerõ zérus értékû. A -ban $V = 240\ N$ pozitiv érték. Innen - eg&eac pontig - lineáris. A C keresztmetszetbeli értéket megkapjuk, ha az A keresztmetszetbeli értékbõl leveonjuk a megoszló terhelés alatti területet (p_o lefelé mutat!)

$\Delta V = p_o \cdot 2a = 5000 \cdot 0{,}8 = 400\,N$. A nyiróerõ értéke $240 - 400 = -160\,N$. Ez az érték a B keresztmetszeti nem változik és itt B értékével zérussá válik.

A nyomatéki ábra megrajzolásához a nyiróerõábra lineáris szakaszát helyettesitsük két állandó szakasszal úgy, hogy a függvény alatti terület értéke ne változzon és az állandó szakaszok a lineáris szakasz kezdõ és végértékével egyezzenek meg. (Az állandó szakaszokat a 76. ábrában szaggatott vonalla jelöltük). A két állandó szakasz a lineáris szakasz feléig tart.

Ezzel az egyszerû fogással elértük, hogy a nyiróerõ ábra csak állandó szakaszokból áll. Ilyen nyiróerõábrához már tudunk nyomatéki ábrát szerkeszteni. A szaggatott nyiróerõértékekhez tartozó egyeneseket a nyomatéki ábrábanis szaggatottan rajzoltuk meg. E két egyenes a valóságos nyomatéki ábra parabolikus szakaszának kezdõ és végérintõje. ($\frac{dM}{dx} = -V$ és az állandó szakaszok a lineáris szakasz kezdõ és végértékével egyeznek meg!)

A parabolikus szakasz két pontját és a pontbeli érintõke ismerve - a parabola már megrajzolható.

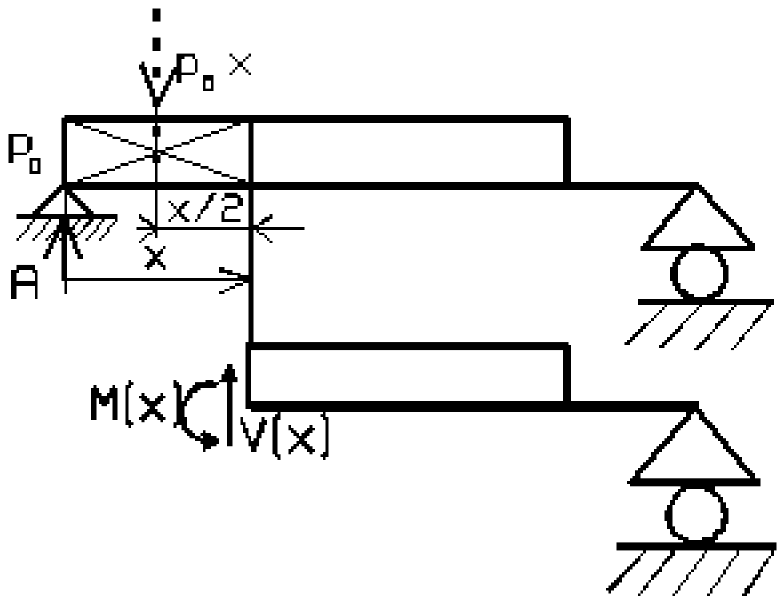
A nyomatéki ábrának helyi szélsõértéke ott van, ahol a nyiróerõábra zérussá válik. Elõször határozzuk meg ezt a helyet. Ehhez irjuk fel a nyiróerõ függvényét.

A 77. ábrán sraffozott - balró lévõ - részt elhagyva a definició szerint:

$$V(x) = A - p_o x$$

$V(x) = 0$ értéknél

$$x - x_o = \frac{A}{p_o} = \frac{240}{500} = 0{,}48\, m$$



77. ábra

Irjuk fel a hajlitónyomatéki függvény értékét is az x helyen.

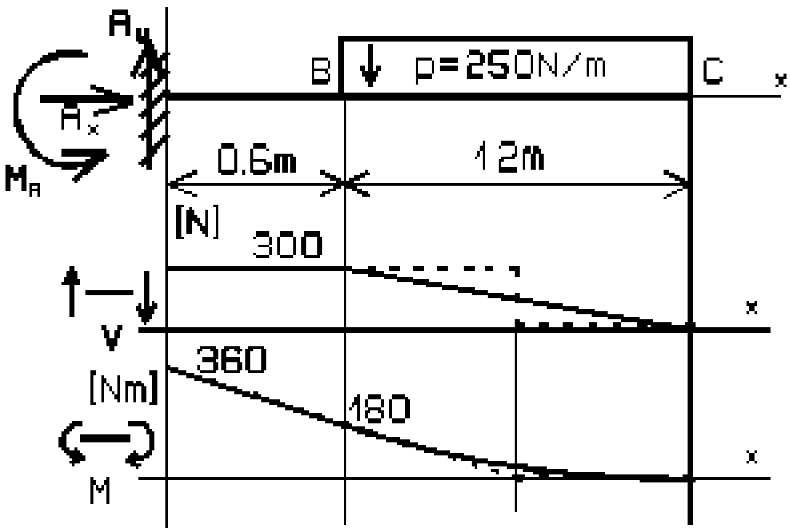
$$M(x) = -Ax + p_o x \cdot \frac{x}{2}$$

A nyomaték értéke az $x = x_o$ helyen

$$M(x_o) = -Ax_o + p_o \frac{x_o^2}{2} = -A\frac{x_o}{2} = -240 \cdot 0{,}24 = -57{,}5\ N \cdot m$$

(mert $p_o x_o = A$).

A maximális nyomaték helyének és nagyságának ismeretében a nyomatéki ábra már megrajzolható.



78. ábra

2.) Rajzoljuk meg a 78. ábrán vázolt befogott tartó igénybevételi ábráit.

Elõször határozzuk meg a reakcióerõrendszert. Befogásnál egy általános helyzetû erõ $(A_x\ ,\ A_y)$ és M_A

Az egyensúlyi egyenletek:

$\sum X_i = 0 \qquad A_x = 0 \qquad A_x = 0$

$\sum Y_i = 0 \qquad A_y - p \cdot 1{,}2 = 0 \qquad A_y = 300\,N$

$\sum M_i = 0 \qquad M_A - p \cdot 1{,}2(0{,}6 + 0{,}6) = 0 \qquad M_A = 360\ Nm$

Tudjuk, - a terhelés ismeretében - hogy a nyiróerõábra egy állandó és egy lineáris szakaszból áll.

A nyomatéki ábra lineáris és parabolikus szakaszokból áll. A nyiróerõábra kezdõértéke A_y, a nyomatéki &aacut

Rajzoljuk meg a nyiróerõábrát.

Az A-B szakasz állandó $V = A_y$ - pozitiv.

A B-C szakasz lineáris és a végére $p \cdot 1{,}2 = 250 \cdot 1{,}2 = 300\ N$ a változás negativ irányban, mert p lefelé mutat.

A nyomatéki ábra megrajzolásához a nyiróerõábra lineáris szakaszát helyettesitsük állandó (szaggatottan rajzolt) szakaszokkal.

A nyomatéki ábra értéke A -ban $M_A = 360\ Nm$. Az A-B szakaszon lineáris. A változás $300 \cdot 0{,}6 = 180\ Nm$ - negativ irányban, mert a terület pozitiv.

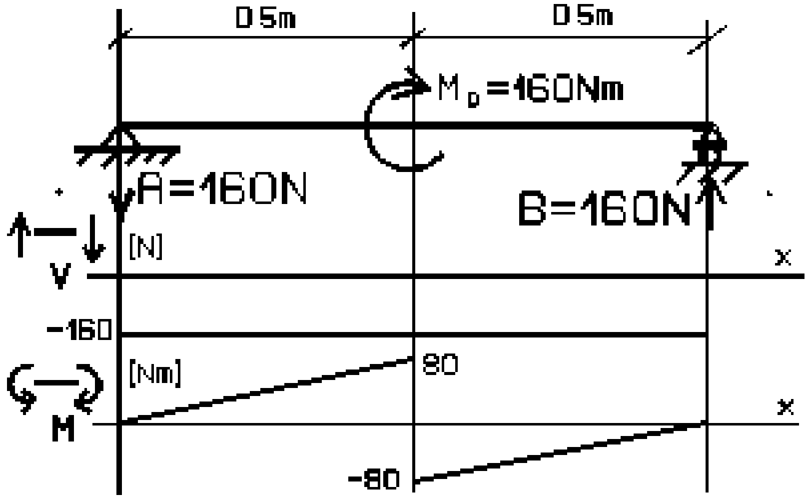
A szaggatott nyieróerõábra alatti terület: $300 \cdot 0{,}6 = 180\ Nm$, azaz a nyomaték értéke a BC szakasz felére zérusra csökken és utána nem változik (szaggatott egyenesek).

A két érintõ ismeretében a parabolikus szakasz megrajzolható.

8. Gyakorló feladatok

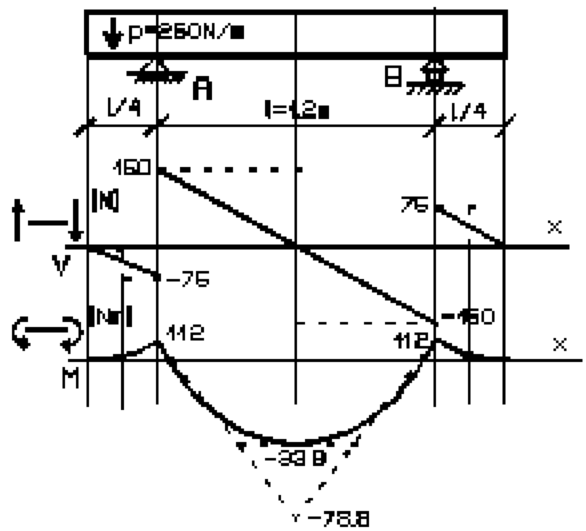
A IV. fejezetben foglaltak begyakorlására minden magyarázat nélkül megadjuk az alábbi feladatokat és végeredményüket.

1.) Határozza meg a 79. ábrán vázolt kéttámaszú tartó igénybevételi ábráit!

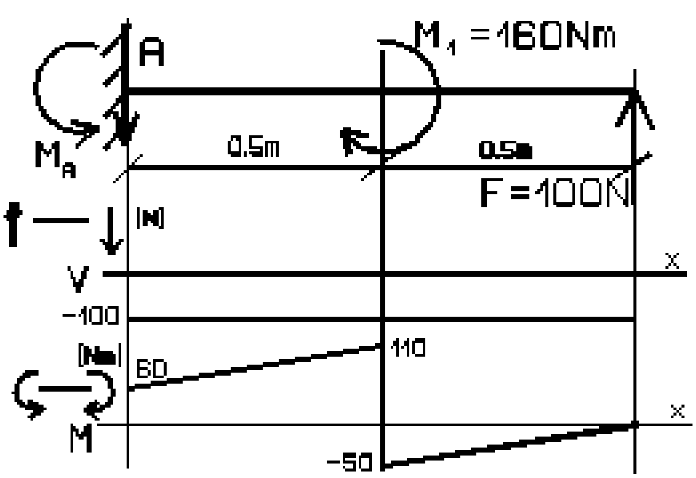


79.ábra

2.) Határozza meg a 80. ábrán vázolt konzolos tartó reakcióit és igénybevételi ábráit:


p=250N/m
A
B
l/4
l=1,2m
l/4
160
[N]
75
x
V
-75
-150
[Nm]
112
112
x
M
-33,8
-78,8

80. ábra


A
M1 =160Nm
MA
0,5m
0,5m
F =100N
[N]
V
x
-100
[Nm]
60
110
M
x
-50

81. ábra

3.) Határozza meg a 81. ábrán vázolt befogott tartó reakcióit és igénybevételi ábráit!